

LOGICA

MANUAL DE FILOSOFIA

Para uso de los alumnos del 5º año
de Educación Secundaria - Vol. I

Escrito en colaboración por:
FRANCISCO MIÑO QUESADA y
AUGUSTO SALAZAR BONDY

Volumen: LOGICA
por Francisco Miró Quesada

MANUAL DE FILOSOFIA Vol. I

LOGICA

por FRANCISCO MIRO QUESADA

Catedrático de Lógica y Filosofía de las
Matemáticas en la Universidad Nacional
de San Marcos.



Editorial Universo S.A.

LIMA — PERU

Décima Tercera Edición

*A los maestros de filosofía del Perú,
en reconocimiento de su esfuerzo por la
formación de una juventud que piense por
sí misma.*

© EDITORIAL UNIVERSO S.A.
Av. Nicolás Arriola 2285 - La Victoria
Teléfono 24-1639 - Casilla 241 - Lima

PROLOGO AL MANUAL

Nuestra cultura depende del pensamiento más que ninguna otra de la historia humana. Depende del pensamiento no sólo porque la organización de la sociedad está hoy día sujeta directamente a las regulaciones de la ciencia, sino también y sobre todo porque vivimos una época de grandes transformaciones, el fin de una era y el ingreso a otra completamente nueva de la marcha histórica de la humanidad. Por eso mismo, el hombre vive hoy en peligro permanente de desorientación. Ante los cambios enormes que suceden a nuestro alrededor en el dominio de la ciencia, la técnica, la industria y la política, es difícil saber cuáles son las ideas, las opiniones, los principios que han perdido vigencia y cuáles tienen valor permanente, qué formas de pensar y de actuar deben ser conservadas y cuáles están condenadas a desaparecer. De allí que la vida moderna exija de manera muy especial el enfrentamiento filosófico con los grandes problemas humanos, gracias al cual puede comprenderse la razón del cambio actual y alcanzarse una orientación racional hacia el futuro de la sociedad y de la historia. La visión que la filosofía da no es por cierto absoluta, pues el pensamiento humano tiene la virtud de ser autocorrectivo. Pero sólo a través del análisis filo-

sófico podrá lograrse un principio de autocorrección seguro y fecundo y alcanzarse una comprensión más justa y clara de la era revolucionaria, la era cósmica, en la cual estamos ingresando.

Los retos intelectuales que el mundo moderno plantea al ciudadano son pues enormes en todos los campos de la acción. Por eso es imprescindible que el joven que termina su Educación Secundaria posea una preparación especializada suficiente, que haga de él un miembro útil de la sociedad, un factor eficaz de progreso. Pero también es imprescindible que, como principio de integración de esta cultura especializada, posea una visión universal de los hechos y los problemas humanos. En el Perú, como en la mayoría de los países más adelantados de Europa y de la América Latina, ha terminado por imponerse la idea de una Secundaria especializada, cuya misión es responder a las exigencias de la capacitación científica de los educandos. Pero, a partir del presente año, también la necesidad de la integración y la crítica superior de los conocimientos va a ser atendida con el establecimiento de un curso de filosofía que es común para las dos ramas del segundo ciclo de la Educación Secundaria. Esto muestra que se ha comprendido claramente la relación que nuestro mundo tiene con la filosofía y que se ha visto con exactitud que la filosofía es una disciplina clave para la adaptación del ciudadano a los requerimientos de la nueva cultura.

Se comprende fácilmente la enorme responsabilidad que tienen en sus manos los maestros de filosofía. Ella

es doble: crear una auténtica enseñanza filosófica en el Perú, es decir, una enseñanza ajustada a los requerimientos de la didáctica y la técnica filosófica, y hacer que ella cumpla su misión crítica y orientadora de la comunidad nacional. Estas exigencias están tan íntimamente unidas a la esencia de la filosofía que su olvido o postergación compromete gravemente a la educación filosófica y hace de ella un remedo, una falsificación perjudicial. Cuanto más importante y elevada es una disciplina intelectual, más fácil es su mistificación y anquilosamiento. Este es el caso de la filosofía. Por eso, de la actitud empeñosa y vigilante del maestro depende en lo sustantivo el buen éxito del nuevo plan de enseñanza filosófica que el presente año se pone en vigencia.

Teniendo en cuenta estas condiciones, se ha escrito el presente Manual, que no pretende ser sino un primer ensayo de desarrollo de los nuevos programas de filosofía. El principal cuidado de los autores ha sido mostrar al estudiante la verdad de la filosofía, es decir, hacerle ver cómo ella no es una disciplina que pueda cultivarse apelando a la simple memoria, sino que, auténticamente practicada, requiere la activa participación de la reflexión y promueve el pensamiento libre y expansivo. Pero, además, se ha buscado hacer patente la íntima relación que los temas y problemas del filosofar tienen con la experiencia y la vida del hombre, es decir, dar una prueba de la falsedad de la opinión que ve en la filosofía un saber abstracto y estéril, cuando es esencialmente una meditación de la existencia y una guía

racional de la acción.

El Programa oficial contempla el doble requerimiento de la filosofía en la cultura contemporánea: de un lado, una exigencia de universalidad y continuidad, de conexión del pensamiento de hoy con la historia de la cultura; de otro, una exigencia de modernidad y de crítica, de actitud desprejuiciada y libre, capaz de aceptar lo mejor y más fundado de acuerdo a los criterios de la certidumbre racional. A estos dos requerimientos quieren responder los dos volúmenes del presente Manual. En el primero se desarrolla el aspecto más moderno y revolucionario de la filosofía, el que más ha cambiado y progresado en estos últimos años y el que se ajusta más a las necesidades instrumentales del pensamiento de hoy: la lógica. La introducción en el Programa de elementos de lógica formal moderna constituye un paso revolucionario en nuestra enseñanza —e inclusive en la de América— y acrecienta el valor crítico e instrumental de este curso. En el segundo, se enfrenta al estudiante con los temas clásicos, con los grandes problemas que, desde los albores de nuestra cultura en Grecia, han preocupado a la humanidad. Con ello, a la vez que la reflexión del alumno se vincula con la tradición del pensamiento, se abre al horizonte de la experiencia del mundo y de la vida. Pero aquí también, por ser abordado el tratamiento de esos temas y problemas no de un modo dogmático, sino con la máxima libertad de pensamiento, se reafirma y estimula en el alumno el sentido de la crítica racional. La persecución

de esta doble meta señala el sentido último de este Manual: contribuir, en la medida de sus posibilidades, a que los jóvenes de hoy y los hombres de mañana comprendan que el pensamiento racional y, en general, toda cultura y actividad humana sólo alcanzan su verdadero valor y fundamento cuando están comprometidos en la lucha por la liberación y la dignidad del hombre.

Por ser éste un libro de iniciación y tener fundamentalmente un propósito didáctico, se ha acompañado el desarrollo propiamente dicho del Programa de consideraciones preparatorias y de aclaraciones y ejemplos frecuentes, destinados a facilitar la comprensión de los temas y problemas tratados. Asimismo, se han incluido ejercicios e indicaciones bibliográficas con el objeto de ayudar a los profesores a fijar y ampliar el tratamiento de las proposiciones del Programa y de dar además orientaciones que permitan al lector proseguir por su cuenta los estudios iniciados en el curso escolar. El curso de Introducción a la Filosofía recomienda además la lectura y comentario de textos clásicos seleccionados, a fin de poner en contacto al alumno con las fuentes del pensamiento occidental.

Este es, permítasenos repetirlo, sólo un ensayo, sujeto a todas las deficiencias y errores de las primeras pruebas. Nos acogemos por eso al benévolo juicio de los profesores con cuyo consejo y ayuda el presente libro podrá mejorarse grandemente en el futuro.

LOS AUTORES.

Lima, Marzo de 1961.

PROLOGO A LA PRIMERA EDICION

En el presente volumen, el primero del Manual, se ofrece al estudiante un curso completo de lógica. El curso es completo, no porque contiene todos los temas de la lógica moderna, sino porque, en sentido pedagógico, contiene todo aquello que el estudiante necesita para comprender a fondo lo que es la lógica y la manera como se aplica para analizar el razonamiento humano.

La tarea de escribir un curso de lógica para estudiantes de Secundaria no es fácil. Desde el primer capítulo surge la dificultad de conciliar el rigor de la lógica moderna con la claridad pedagógica. La lógica, tal como existe en la actualidad, es la disciplina más rigurosa, es decir, más precisa y exacta de todas las disciplinas posibles, incluso las matemáticas. Por eso, si las explicaciones no ofrecen todo el esclarecimiento necesario para que el estudiante pueda seguir paso a paso todo el proceso lógico, el texto se torna ininteligible. Es esta la razón por la que hemos debido ser sistemáticamente explícitos. No hemos incluido en la explicación ninguna palabra cuyo significado no haya sido suficientemente aclarado, ningún razonamiento cuyas partes no hayan sido indicadas con el mayor cuidado, ningún simbolismo cuyo uso no haya sido determinado con la máxima precaución. Por esta razón, el estilo del

curso es demasiado amplio y el contenido bastante extenso. Si hubiéramos procedido como procede la mayoría de los autores de lógica moderna, con rigor pero sin cuidarse de las normas pedagógicas, podríamos haber escrito nuestro curso en un espacio diez veces menor.

La constante preocupación por la eficacia pedagógica ha hecho que, a veces, no nos haya sido posible exponer los conceptos con el depurado rigor que exigen los cánones de la filosofía moderna. Desgraciadamente, ésta es una experiencia que sufre todo maestro que se preocupa, sobre todas las cosas, por que sus estudiantes lo comprendan. El desarrollo analítico y extenso del texto se ha debido también a que, por tratarse de una renovación total en la pedagogía filosófica peruana, hemos pensado que muchos maestros puedan encontrar dificultades al enfrentarse con un material totalmente nuevo para ellos. Muchos de los actuales maestros de filosofía han seguido cursos de lógica moderna en la Universidad, pero muchos no han seguido, estos cursos. Y es pensando en ellos que nos hemos esforzado en brindarles el máximo apoyo para el noble esfuerzo que habrán de realizar: contribuir al desarrollo cada vez mayor del pensamiento filosófico en el Perú y, a través de este desarrollo, hacer posible que nuestro país tome cada vez más conciencia de sí mismo y de su destino histórico.

Como la lógica es una disciplina rigurosa, que exige un gran esfuerzo de concentración y mucha práctica en el manejo de los conceptos y de los símbolos, hemos

incluido, al final de los capítulos que así lo requieren listas de ejercicios. Se trata de ejercicios elaborados especialmente para este curso, a la vez graduados y sencillos, que harán posible desarrollar cierto entrenamiento en la práctica de las técnicas lógicas. Se recomienda a los maestros que exijan a los estudiantes que resuelvan los ejercicios y que desarrollen en clase algunos de ellos para mostrar el camino. Para evitar dificultades, hemos colocado al fin del libro las soluciones de todos los ejercicios, indicando, incluso, cuáles son los menos fáciles. Se recomienda al estudiante que trate de resolver los ejercicios sin mirar la solución y que entregue lo hecho para saber si ha logrado resolver el problema o no. Si el estudiante desarrolla todos los ejercicios del libro, estará en condiciones de comprender mucho más a fondo lo explicado y de seguir profundizando sus estudios de lógica en libros de nivel ya universitario.

El doctor Augusto Salazar Bondy ha colaborado en la redacción de la tercera parte del presente volumen. Deseo agradecer especialmente al profesor Jorge Rosales Hinojosa, antiguo y distinguido estudiante de mi curso de Lógica Moderna en la Universidad de San Marcos, por haber corregido las pruebas de la presente edición. El señor Rosales enseña en la Escuela Nocturna "Andrés Rosales Valencia" y es Profesor de Filosofía en el Colegio Nacional "José María Eguren" y en la Gran Unidad Escolar "Alfonso Ugarte".

F. M. Q. C.

PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

El curso de Lógica que publicamos el año pasado, ha tenido, junto con el de Introducción a la Filosofía, un éxito que superó todas nuestras expectativas. El hecho de considerar de manera analítica y detallada todos los puntos del programa, la novedad del tema tratado, la entusiasta respuesta de los maestros, la facilidad con que los estudiantes comprenden la técnica de los esquemas, la concreción y utilidad de los conceptos expuestos, infinitamente superior a las de los conceptos desarrollados en los viejos textos de lógica clásica, han sido factores que han contribuido al éxito. Pero en todo momento hemos tenido conciencia de que el texto de Lógica tenía un defecto: su gran extensión. Este defecto se debió a una sola causa: al apuro con que debió redactarse.

Los nuevos programas de Lógica se aprobaron a fines de 1960, y por diversas razones no pudimos empezar a escribir el texto de Lógica sino a mediados de Febrero de 1961. Debido a que era imprescindible que el libro viera la luz antes de que empezaran las clases en los colegios, el texto, apenas fue terminado, se entregó al linotipo. A pesar de todos nuestros esfuerzos, fue ya imposible reducirlo. Pero este año hemos hecho

una revisión total, y hemos además, averiguado, por medio de numerosas encuestas, cuáles han sido las principales dificultades que han encontrado tanto los profesores como los estudiantes en la comprensión del contenido. Este doble análisis nos ha permitido efectuar una reducción considerable del texto, eliminando una serie de partes que eran redundantes, aclarando las que no eran suficientemente comprensibles, y suprimiendo párrafos demasiado técnicos o complicados, innecesarios para una comprensión cabal de los conceptos fundamentales. Gracias a estas reducciones, presentamos en esta segunda edición un texto mucho más breve y manuable, de más fácil manejo, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. Además de estas extensas reducciones, hemos agregado algunas partes, ya sea para precisar conceptos, o bien para incluir algún punto importante que por la premura del tiempo no fue considerado en la anterior edición. Hemos también revisado y corregido cuidadosamente todos los ejercicios, suprimiendo algunos y agregando otros.

A pesar de que el texto de esta segunda edición ha sido reducido a casi la mitad del de la primera, es aún un poco largo. Pero ello se debe exclusivamente al programa. El programa, aún experimental, abarca demasiados tópicos. Y un libro que pretenda estar de acuerdo al programa oficial, tiene que tratar y desarrollar con celo todos los puntos de dicho programa. De otra manera, la pretensión de estar de acuerdo con el programa oficial,

no pasaría de ser una farsa. En el futuro, el programa, aún en etapa experimental, será seguramente reducido.

Sin embargo, la extensión del programa no constituye una dificultad que impida la buena enseñanza de la lógica. Como es evidente para quien estudie nuestro texto, lo fundamental de su contenido es la teoría de la inferencia coligativa que se basa en el método de los esquemas. El complemento necesario de esta parte es la teoría de las clases. Un estudiante que haya comprendido a fondo y asimilado sólidamente la teoría de la inferencia coligativa y la teoría de las clases, estará verdaderamente iniciado en los principios de la lógica moderna. Recomendamos por eso al maestro insistir sobre estos dos aspectos esenciales. Los restantes puntos deben desarrollarse buscando la comprensión, la información que abre y amplía el panorama cultural del estudiante, pero no buscando la asimilación del detalle.

Además de este recurso, el maestro puede suprimir del temario exigible las partes del texto que han sido impresas en punto menor. Estas partes deben leerse y comprenderse porque tienen valor formativo, pero no es necesario exigir su estudio sistemático. Procediendo de esta manera tanto los maestros como los estudiantes se darán cuenta que la materia estudiada queda limitada a una extensión de fácil acceso, pues la mayor parte del texto se reduce a explicaciones sumamente detalladas de los aspectos fundamentales de la lógica coligativa y de las clases. Estas explicaciones son necesarias para lograr la claridad que tiene derecho de exigir el estudiante. Los

textos de lógica pueden ser muy concentrados si se emplea un lenguaje técnico. Pero quien escriba ese tipo de texto puede tener la seguridad de que quienes se inician en el tema no entenderán lo que leen.

F. M. Q. C.

PROGRAMA OFICIAL DE LOGICA PARA EL 5º AÑO DE SECUNDARIA

(Nota: debe desarrollarse paralelamente al programa-
de Introducción a la Filosofía)

- 1.—INTRODUCCION. 1) Verdades empíricas y lógicas.- La Lógica como teoría de la inferencia.- Función de la Lógica en los problemas humanos.- Breve referencia a la evolución histórica de la Lógica.
- 2.—ELEMENTOS DE LOGICA FORMAL. 2) Lenguaje y pensamiento.- El pensamiento formalizado.- 3) Términos, proposiciones e inferencias.- 4) Teoría de las proposiciones coligativas; los esquemas, la noción de principio lógico.- Ejercicios.- 5) Teoría de las clases: noción de clase; tipos de clases; principales relaciones y operaciones con clases.- La teoría del silogismo y su relación con la teoría de las clases.- Ejercicios.- 6) Lógica de los predicados: noción de función lógica, variables; cuantificación.- Ejercicios.
- 3.—LA LOGICA EN LA PRACTICA DEL PENSAMIENTO CONCRETO. 7) Caracteres del pensamiento correcto: la claridad, la concisión, el rigor, el orden y la coherencia; el discernimiento de la verdad y el error.- Obstáculos del pensamiento correcto.- Pensamiento y situación vital.- 8) La definición.- Ejercicios.- 9) La clasificación y la división.- Ejercicios.- 10) La inducción.- 11) Falacias comunes.- Ejercicios.- 12) Paradojas lógicas.-

Primera parte

INTRODUCCION

Capítulo I

PRIMERAS NOCIONES: LA INFERENCIA, LAS PROPOSICIONES Y LA VERDAD

§ 1. *El mundo de las proposiciones.* El lenguaje consiste en palabras que se combinan para formar oraciones y frases. Según la gramática de la Academia de la Lengua, la oración es la unidad expresiva. La oración es el mínimo de palabras que se requiere para expresar una situación o un hecho, es decir, para comunicar algo sobre algo. La frase es una composición de oraciones. Hay diversos tipos de oraciones y de frases. Pero todos ellos tienen de común que sirven para expresar lo que sucede en nuestra vida, en torno nuestro, en nosotros mismos, en una palabra, para poder hablar sobre el mundo en el cual existimos.

Un tipo muy importante de oración y de frase es la *proposición*. Las proposiciones son aquellas oraciones y frases que tienen una propiedad: pueden ser verdaderas o falsas. La propiedad de ser verdadera o falsa es esencial a la proposición, y es también exclusiva. Toda proposición puede ser verdadera o falsa y, viceversa, si una oración o frase puede ser verdadera o falsas, entonces son proposiciones. Las oraciones o frases que no son ni verdaderas ni falsas, no son proposiciones. Veamos los siguientes ejemplos:

la proposición
es verdadera
o falsa

La oración: "dos más dos igual cuatro" es una proposición porque es una oración verdadera. Las oraciones: "Lima es la Capital del Perú", "Salaverry fue Presidente del Perú", "el calor dilata los cuerpos" son proposiciones porque son todas verdaderas. Las oraciones: "dos más dos igual cinco", "el camarón es una mamífero", "Alianza ganó el campeonato de 1960" son también proposiciones porque son oraciones falsas. Pero las oraciones: "¿Qué hora es?", "cierra la puerta", "Blanca Nieve se escapó del bosque" no son proposiciones porque no puede decirse que son verdaderas o que son falsas. Cuando se hace una pregunta nadie puede pensar que la pregunta sea verdadera o falsa. Cuando se da una orden, a nadie se le ocurre que una orden es verdadera o falsa. Se trata de una orden, es decir, de una norma que exige que se ejecuten tales y cuales actos. Cuando se cuenta un cuento no tiene sentido averiguar si lo que se dice es verdadero o falso. Los cuentos no describen hechos reales, situaciones que existen o han existido; tratan simplemente de divertir a quien los escucha. Tiene sentido decir de una frase tomada de un libro de historia que es verdadera o falsa, pues el historiador puede estar en la verdad o equivocarse. Pero el que cuenta un cuento o escribe una novela, no puede estar en la verdad ni equivocarse. Lo único que hace es inventar situaciones, imaginar hechos, y por eso lo que dice no puede ser ni verdadero ni falso, puede solamente ser interesante, divertido, anodino, pesado, etc.

A veces es difícil saber si una oración es verdadera o falsa. Pero basta comprender su significado para saber que tiene que ser una de las dos cosas. Si decimos, por ejemplo: "hay habitantes en la nebulosa de Andrómeda", no sabemos si esta expresión es verdadera o falsa, porque no disponemos de medios para saber si hay o no hay habitantes en dicha nebulosa. Pero, basta com-

prender el significado de la oración, para saber que de todas maneras se trata de una proposición, es decir, de una oración que puede ser verdadera o falsa. Si algún día se dispone de adecuados métodos de observación, entonces se sabrá que la proposición es verdadera o falsa. Esto está sucediendo con la oración "hay habitantes en Marte". Hasta el presente no se sabe si se trata de una proposición verdadera o falsa. Pero la acumulación de datos, gracias a los progresos de la astronomía, de la astrofísica y de la astronáutica, permite decir ya, casi con certeza, que es una proposición falsa, porque en Marte no hay habitantes.

La propiedad de las proposiciones, a saber, su posibilidad de ser verdaderas o falsas, se debe a que las proposiciones son siempre descripciones de la realidad, descripciones de cosas, hechos, sucesos que han existido, que existen o que existirán. La proposición pretende siempre decir cómo son las cosas, cómo son los sucesos que nos rodean. Por eso puede ser verdadera o falsa, pues su pretensión la enfrenta a una doble posibilidad: o bien coincide con lo que dice o bien no coincide. Cuando coincide, es una proposición verdadera, y cuando no coincide, es una proposición falsa. Así, la proposición "Lima es la capital del Perú", es verdadera, porque describe un hecho existente: que Lima es la primera ciudad de nuestro país. Es verdadera porque lo que afirma es cierto, porque coincide con lo que dice. Pero la proposición "el camarón es un mamífero" es falsa, porque no hay ningún camarón que sea un mamífero.

§ 2. *La relación entre la verdad de las proposiciones.*
Las proposiciones, además de tener la propiedad de ser verdaderas o falsas, tienen otra propiedad fundamental: se relacionan entre ellas por medio de su verdad o de su

falsedad. Cuando una proposición es verdadera, puede derivarse de ella otra proposición verdadera. Así, de la proposición "tres es mayor que dos", se desprende la verdad de la proposición: "dos es menor que tres". Si se sabe que la primera proposición es verdadera, entonces, de manera evidente, incontrovertible, se desprende que la segunda proposición tiene también que ser verdadera.

La relación entre la verdad de las dos proposiciones consideradas se denomina *inferencia o deducción*¹. El ejemplo que hemos analizado es muy simple, porque consiste en el paso de la verdad de una proposición a la verdad de otra proposición. En el proceso de derivación intervienen sólo dos proposiciones. Pero hay casos en los que intervienen más de dos proposiciones. Puede partirse por ejemplo de dos proposiciones verdaderas, y derivarse, de estas dos verdades, la verdad de una tercera proposición. Si partimos de la verdad de estas dos proposiciones: "todos los números pares son divisibles por dos" y "ningún número impar es divisible por dos", podemos derivar la verdad de esta proposición: "ningún número par es impar". Aquí la derivación aún es muy simple, pero es más elaborada que en el caso anterior. Hay que pensar aunque sea un instante para llegar a la conclusión de que la tercera proposición también es verdadera. Y es muy interesante observar que la verdad de esta tercera proposición no se deriva sólo de la verdad de la primera o de la segunda, sino de la combinación de las dos verdades.

ii. inferencia

¹ Algunos autores llaman también a la inferencia, *raciocinio o razonamiento*. Pero generalmente se emplean sólo las dos palabras "inferencia", "deducción". La palabra "razonamiento" tiene un significado mucho más amplio, que incluye todos los procesos intelectuales mediante los cuales el pensamiento, por un camino amplio y elaborado, llega a la verdad. Puede incluir aspectos empíricos (pronto veremos lo que significa esta palabra) lo que no sucede nunca con la deducción.

Los procesos de deducción o inferencia, en que se parte de la verdad de varias proposiciones y se llega a la verdad de una proposición¹, pueden ser complicados. En algunos casos son complicadísimos, tan complicados que sólo las personas con una inteligencia muy bien entrenada, las personas acostumbradas a través de los años a analizar inferencias semejantes, pueden captar la relación entre las verdades en el punto de partida y en el punto de llegada.

En las ciencias matemáticas se encuentran con frecuencia estos tipos de inferencia o deducción, y por eso son ciencias difíciles de comprender. Todos hemos estudiado matemáticas en Instrucción Media, como aritmética, álgebra o geometría, y sabemos que en ellas se realizan continuamente procesos de inferencia o deducción. El conocimiento matemático reside, esencialmente, en la realización de deducciones o inferencias. Todas las teorías matemáticas, ya sean las elementales como la geometría que hemos estudiado en Media, o el análisis infinitesimal, el cálculo de probabilidades, etc., que se estudian en la Universidad, consisten en demostrar teoremas por medio de la deducción. Para ello se parte de ciertas proposiciones cuya verdad se afirma sin demostrar, y que se denominan *axiomas* o *postulados*. Y de estas proposiciones verdaderas, se van deduciendo otras proposiciones verdaderas que son los llamados teoremas. Cuando se demuestra un teorema por medio de la deducción, dicho teorema puede servir, a su vez, como punto de par-

1 Los procesos de deducción o inferencia son, en general, muy ricos y presentan todas las posibilidades. De la verdad de varias proposiciones puede pasarse a la verdad de una proposición, como acabamos de ver, pero puede darse también el caso inverso: de la verdad de una proposición puede pasarse a la verdad de varias proposiciones. Este caso empero no se presenta con frecuencia y no es necesario estudiarlo para comprender lo que es la deducción.

tida para nuevas demostraciones o deducciones y así sucesivamente¹.

Llegamos así a una conclusión básica. La posibilidad de derivar la verdad de una proposición de la verdad de otra u otras proposiciones, no sólo constituye una posibilidad interesante de ejercitar la mente, sino que es el fundamento, la posibilidad misma, de una ciencia tan importante como la matemática.

§ 3. *Función de la lógica en los problemas humanos.*
Como hemos visto, la inferencia es el fundamento del conocimiento matemático, y como el conocimiento matemático es el fundamento de la gran mayoría de las demás ciencias, la inferencia es un proceso intelectual de máxima importancia.

Si la inferencia es importante para las ciencias lo es también para la vida real, para la vida cotidiana del hombre de hoy, porque esta vida está envuelta por la ciencia. La ciencia es lo que permite crear la técnica, es decir, las máquinas que hacen posible transformar nuestra vida. La vida moderna depende esencialmente de la máquina. Si no fuera por las máquinas el hombre no habría podido transformar el mundo en que vive y viviría aún como un cavernícola del paleolítico. Nos basta mirar en nuestro derredor para ver de inmediato que vivimos rodeados de máquinas. Desde la plancha eléctrica, que nos parece ahora tan simple, hasta la milagrosa televisión, desde los pequeños juguetes que manipulan los niños pequeños hasta los modernos aviones a chorro, la máquina constituye parte de nuestra vida. Y la máquina no es sino la aplicación de la ciencia, especialmente

¹ Sobre el conocimiento matemático, véase el segundo volumen del presente Manual. Introducción a la Filosofía, cap. III.

de la matemática y de la física, a la transformación del mundo.

Si la base de las matemáticas es la inferencia, es decir, la lógica, y las matemáticas son la clave de la técnica, de las máquinas que permiten modificar la vida del hombre, es evidente que la lógica está unida de manera insoluble a nuestra vida.

Es muy fácil comprender por qué la lógica es la que hace posible la técnica. Para construir una máquina hay que cumplir dos condiciones: primero, conocer ciertas cosas, y segundo, poder predecir ciertos acontecimientos. Pongamos como ejemplo la construcción de un avión. Para poder construirlo es necesario conocer ciertos principios de aerodinámica, es decir, de física; hay que conocer además ciertas propiedades de los metales (puesto que el avión es hecho de metal), ciertas propiedades de otras sustancias (gasolina, aceite, caucho, etc.). Pero además hay que poder hacer una predicción de fundamental importancia: que una vez listo el avión, será capaz de volar. Si no se pudiera predecir con toda seguridad que el avión va a volar cuando esté listo, ningún hombre se arriesgaría a manejarlo por primera vez, pues ello podría significar una muerte segura.

Ahora bien, el procedimiento mediante el cual se logra hacer una predicción es posible gracias a la lógica. Porque predecir significa una sola cosa; pasar de una verdad presente a una verdad futura. Regresando a nuestro ejemplo del avión, si yo predigo que volará una vez que esté terminado, estoy partiendo de una verdad presente: "el avión ha sido construido de tal y cual manera, de acuerdo con los principios verdaderos de la aerodinámica y con todos los requisitos que exige el conocimiento científico". Pero estoy partiendo de esta verdad presente para llegar a una verdad futura. Estoy razonando de la siguiente manera: debido al hecho de que

se han cumplido todos estos requisitos del conocimiento científico, se desprende la verdad de que el avión volará. Esta verdad se infiere de la anterior, se deduce de ella. *Es decir que se ha pasado de la verdad presente a la verdad futura por medio de la lógica.* Así ocurre con todas las predicciones que hacen posible la técnica¹. Esto es lo maravilloso de la lógica, esto es lo que constituye su importancia y su poder. La lógica permite pasar de la verdad de una proposición (o de varias) a la verdad de otra proposición (o de otras), es decir, permite pasar de la verdad conocida a la verdad que todavía no se conoce. Permite descubrir nuevas verdades partiendo de verdades acumuladas. Permite hacer progresar nuestros conocimientos.

§ 4. *Verdades lógicas y verdades empíricas.* Supongamos que hacemos la siguiente predicción: cuando el hombre llegue a la Luna tendrá que llevar máscara de oxígeno. Para hacerla hemos partido de la verdad de dos proposiciones: 1) "en la Luna no hay oxígeno"¹. 2) "sin oxígeno el hombre no puede vivir". De estas dos proposiciones verdaderas hemos derivado una tercera proposición verdadera: "si el hombre quiere vivir en la Luna tendrá que llevar máscara de oxígeno". Al hacer esta derivación hemos realizado una inferencia, una deducción. De la verdad de las dos primeras proposiciones hemos pasado a la verdad de la tercera proposición. Y es esta nueva verdad la que nos permite predecir la conducta del hombre en la Luna, a pesar de no haber estado

1 En realidad, las cosas no son tan simples como las pintamos en estas líneas, pero las exigencias pedagógicas nos obligan a esquematizar. Empero, a pesar de esta limitación, el lector puede tener la seguridad de que nada de lo dicho atenta contra el rigor exigido en una exposición de lógica.

1 Nos referimos a la atmósfera, es decir, al oxígeno respirable. El oxígeno existe en la Luna como componente de sustancias minerales.

nunca allí. Mas para llegar a esta nueva proposición verdadera sólo hemos hecho una cosa: hemos analizado las dos primeras y luego construido la tercera; hemos realizado todo el proceso sin salirnos de las proposiciones. La relación entre las dos primeras proposiciones y la tercera proposición es puramente interna, es una pura relación de expresiones. Para pasar de la verdad de las dos primeras a la verdad de la tercera no hemos necesitado mirar a nuestro alrededor, es decir, no hemos necesitado observar el mundo. Sólo hemos considerado las tres proposiciones. De la verdad de las dos primeras hemos llegado a la verdad de la tercera, porque dichas proposiciones se relacionan de cierta manera. La inferencia o razonamiento lógico, que consiste en pasar de la verdad de unas proposiciones a la verdad de otras es un proceso puramente proposicional, que se realiza única y exclusivamente en el mundo de las proposiciones, sin salirse de ellas.

Regresemos a nuestro ejemplo. En él, partiendo de dos proposiciones verdaderas, hemos llegado a otra proposición verdadera. Sabemos cómo hemos hallado la verdad de esta última, porque para hallarla hemos partido de las dos primeras. Pero no hemos reflexionado sobre la manera cómo hemos hallado la verdad de las dos primeras. Si reflexionamos sobre lo que hemos hecho para hallar la verdad de las dos primeras, nos daremos cuenta de inmediato que hemos procedido de manera muy distinta. No hemos partido de la verdad de otras proposiciones, sino que, de hecho, las hemos tomado como verdaderas. Pero, ¿por qué las hemos tomado como verdaderas? Porque los astrónomos y los biólogos han observado el mundo, la realidad que nos rodea y han llegado a la conclusión de que esas proposiciones son verdaderas. Para llegar a la conclusión de que la proposición "En la Luna no hay oxígeno" es ver-

dadera, los astrónomos observaron durante años y años la superficie de la Luna por medio del telescopio y del espectrógrafo. Y sólo después de una minuciosa observación adquirieron la convicción de que en la Luna no hay atmósfera.

Para llegar a la convicción de que sin oxígeno los hombres no pueden vivir, la observación no ha tenido que ser ni tan difícil ni tan minuciosa como la de la Luna, porque la experiencia diaria demuestra que un hombre que no puede respirar aire, es decir, oxígeno, muere sin remedio. Pero, de todas maneras, la verdad de esta segunda proposición de la ciencia biológica se basa también en la observación.

La manera como se ha fundamentado la verdad de las dos primeras proposiciones que sirvieron de punto de partida para nuestra predicción es, pues, completamente distinta de la manera cómo se fundamentó la verdad de la tercera proposición. En el caso de la tercera proposición (la predicción), lo que permitió convencerse de su verdad fue su relación con las dos primeras proposiciones, fue una relación puramente proposicional. En cambio, en el caso de las dos primeras proposiciones, lo que permitió convencerse de su verdad fue la observación de la realidad por medio de los sentidos.

La diferencia entre la manera como hemos procedido para saber la verdad de la predicción y la verdad de las dos proposiciones que nos sirvieron de punto de partida nos muestra que existen dos tipos completamente diferentes de establecer o de fundamentar la verdad de las proposiciones. En ciertos casos, la verdad de una proposición se establece o fundamenta por medio de la observación de la realidad o, como también se dice, por medio de la *experiencia*. La realidad se observa generalmente por medio de los sentidos, por medio de la vis-

a predicción
nace de una
relación pro-
posicional

experiencia
sensible y
verdad em-
pírica

ta, del tacto, del oído, etc. Esta observación se denomina, en el vocabulario filosófico, experiencia sensible. Por eso decir que se fundamenta la verdad por medio de la observación a través de los sentidos o por medio de la experiencia sensible es lo mismo. La verdad de las proposiciones que se basan en la experiencia o en la observación por medio de los sentidos se denomina *verdad empírica*¹.

Pero en otros casos la verdad de una proposición no se establece a través de la observación, sino por medio de la inferencia. Es decir, se parte de ciertas proposiciones cuya verdad se acepta y, de allí, mediante el puro pensamiento, analizando las partes de dichas proposiciones, comparándolas entre sí, se llega, como conclusión, a otra proposición verdadera. Así hemos establecido la verdad de la proposición "si el hombre quiere vivir en la Luna tiene que llevar máscara de oxígeno". Es decir, que para establecer esta última verdad no es necesario observar el mundo, sino partir de proposiciones cuya verdad ya se conoce. En este caso no han funcionado nuestros sentidos para observar el mundo, sino sólo nuestra inteligencia para comparar y relacionar las proposiciones entre sí. Cuando la verdad de una proposición se ha establecido de esta manera, se dice que se ha establecido lógicamente. La relación entre las proposiciones que sirven de punto de partida y la proposición cuya verdad se demuestra partiendo de la verdad de aquéllas, se denomina *verdad lógica*.

inferencia
y verdad
lógica

Para no dejar ninguna duda sobre esta doble manera de establecer la verdad de las proposiciones, hemos elaborado el siguiente análisis en el que se expone gráficamente todo lo dicho.

1 Porque "empírico" es un adjetivo que se deriva del adietivo griego "empeirikon" que se deriva a su vez de "empeiria", que quiere decir "experiencia". Sobre estos temas véase el volumen de Introducción a la Filosofía, capítulos II y III.

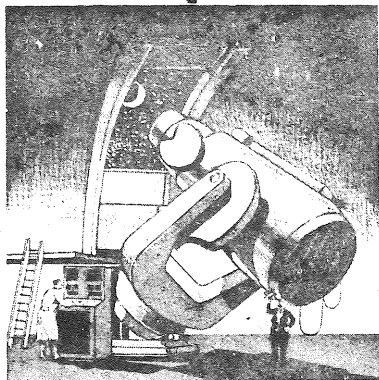
ANALISIS DEL EJEMPLO DE INFERENCIA PRESENTADO EN
LAS PAGINAS 28 Y SIGTES.

1.—Hay dos proposiciones cuya verdad se fundamenta empíricamente, es decir, se establece por medio de la observación de situaciones o hechos reales. Estas proposiciones son: "En la Luna no hay oxígeno" y "Los hombres no pueden vivir sin oxígeno". Para mayor comodidad y siguiendo un método que vamos a aplicar de manera constante en este libro, simbolizamos a la primera proposición con P1 y la segunda con P2

2.—Hay una tercera proposición cuya verdad no se deriva de la observación de la realidad sino de la verdad de las dos proposiciones anteriores. Esta proposición es: "El hombre tendrá que usar máscara de oxígeno en la Luna". Simbolizamos a esta proposición con P3. (1)

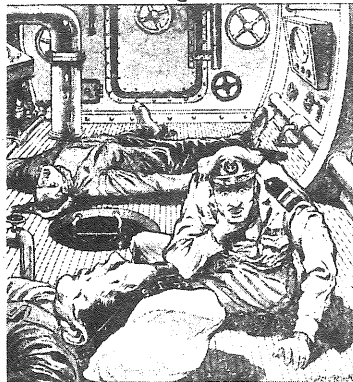
3.—Las dos primeras proposiciones establecen su verdad por medio de la observación. Esto se esquematiza mediante una relación entre ellas y determinados hechos que pueden observarse.

$P_1 = \text{"En la Luna no hay oxígeno"}$



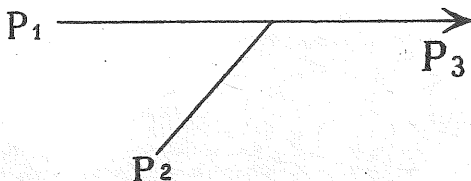
1 El análisis de este ejemplo de inferencia no es completamente riguroso, pero es imposible hacerlo más exacto en el estado actual de la exposición. Lo único que perseguimos es que el lector no iniciado comience a darse cuenta de lo que es un proceso de deducción.

P_2 ="Los hombres no pueden vivir sin oxígeno"

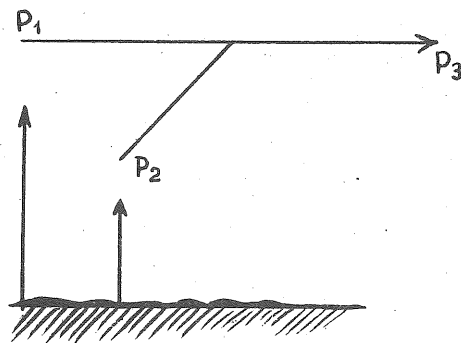


Nótese que la dirección de la flecha es de la realidad observada a la proposición. Ello quiere decir que la observación de la realidad es el fundamento de la verdad de la proposición. La verdad viene de la realidad a la proposición porque la proposición describe lo que sucede en dicha realidad. Por eso la flecha va de la realidad a la proposición.

4.—La verdad de la tercera proposición, en cambio, no se deriva de la observación, puesto que se dedujo antes que los hombres llegaran a la Luna. Se deriva de la verdad de las dos anteriores. Por eso expresamos esto uniendo P_1 y P_2 con P_3 por medio de una flecha. El sentido de la flecha es de P_1 y P_2 a P_3 , para indicar que P_1 y P_2 son el fundamento o razón de la verdad de P_3 . Se expresa así que P_3 es verdadera porque P_1 y P_2 son verdaderas.



5.—En el siguiente esquema se expresa de manera completa la relación entre las tres proposiciones (que constituyen el ejemplo analizado) y el origen o fundamento de su verdad. La verdad de P_1 y P_2 de acuerdo con el esquema anterior, se deriva de la verdad de P_3 de acuerdo con el esquema anterior, se deriva de la verdad de la observación de la realidad. Por eso las flechas van de la realidad a dichas proposiciones. Es importante percatarse de que, en último término, el origen de toda la verdad es la realidad observada. Gracias a esta observación P_1 y P_2 son verdaderas y de la verdad de estas dos se deriva la verdad de P_3 .



§ 5. *Nota histórica sobre la lógica.* La lógica nace como disciplina independiente en Grecia. El gran filósofo Aristóteles fue el primer hombre que escribió un tratado de lógica, en el que se exponía sistemáticamente la teoría de la inferencia. Antes de él otros grandes pensadores griegos habían hecho descubrimientos importantes, pero de manera aislada, como Parménides, Jenófanes y Platón. Pero Aristóteles fue el primero que reunió en un libro, llamado *Organon*, todo el material existente en su época, en el que incluyó sus propios descubrimientos, mucho más numerosos e importantes que todos los anteriores. El mérito de Aristóteles reside en haber descubierto el silogismo. El silogismo es un tipo

de inferencia muy particular, consistente en partir de la verdad de dos proposiciones para llegar a la verdad de una tercera proposición. El ejemplo que hemos dado en la página 23, párrafo 2, es un silogismo. La teoría del silogismo fue expuesta por Aristóteles con tal perfección que, salvo pequeños detalles, conserva su validez hasta nuestros días.

Después de Aristóteles, los filósofos megáricos, entre los que debe mencionarse a Crisipo, Filón y Diodoros Kronos, hicieron nuevos descubrimientos pertenecientes a lo que hoy se llama **lógica coligativa** y que constituye la parte principal de este libro. Es natural que los primeros descubrimientos hechos por los filósofos hayan sido muy simples. Por eso los tipos de inferencia coligativa descubiertos por los megáricos fueron también muy simples.

Debido al inmenso prestigio que alcanzó Aristóteles, tanto en vida como después de su muerte, los descubrimientos hechos por los megáricos no alcanzaron difusión y pasaron completamente desapercibidos para los antiguos. Durante la Edad Media, algunos filósofos medioevales de genio como Petrus Hispanicus, Juan Burdán, Alberto de Sajonia y Pedro Abelardo redescubrieron los tipos de inferencia coligativa que habían descubierto los filósofos megáricos y fueron mucho más lejos que ellos. Avanzaron tanto, que una buena parte de lo que vamos a estudiar en este curso fue descubierto hace más de seis siglos.

Pero los filósofos medioevales se encontraron con una dificultad que les impidió seguir el camino emprendido: la carencia de un lenguaje adecuado. Como hemos dicho, las relaciones de inferencia o deducción entre las proposiciones pueden ser muy complicadas, como sucede en ciertos capítulos de las matemáticas superiores. Y cuando esto sucede es imposible estudiarlas por medio del lenguaje corriente, porque la cantidad de palabras, de oraciones y de frases que se necesita para analizar las inferencias es tan grande que el conocimiento se pierde en un verdadero bosque de expresiones.

Durante el Renacimiento y la Edad Moderna la lógica cayó en receso y fue muy poco lo que progresó. Desde la época de la Escolástica a fines de la Edad Media hasta el primer tercio del siglo XIX, lo único que

los megáricos y la coligación

los filósofos medioevales el redescubrimiento de la coligación

importancia de una forma especializada de lenguaje

Renacimiento y Edad Moderna: estancamiento de la lógica

se conocía y se estudiaba de la inferencia era la teoría del silogismo de Aristóteles y algunos aportes menores de filósofos posteriores como el famoso Cuadro de Boecio que estudiaremos en el capítulo VIII. Debido a que durante siglos y siglos se repetían y se repetían los mismos estudios en torno a la deducción, todo el mundo estaba convencido que no se podía ir más lejos. Y por eso cuando uno de los hombres más geniales de todos los tiempos, Guillermo Godofredo Leibniz, redescubrió por sí mismo todo lo que habían descubierto los megáricos y los medioevales y fue mucho más lejos que ellos, nadie lo comprendió ni se dio cuenta de lo que estaba haciendo. Leibniz fue más lejos que los medioevales porque no sólo descubrió formas de inferencia que ellos no habían descubierto, sino que fue el primer hombre en la historia que se dio cuenta que es imposible progresar en el estudio de la inferencia si no se dispone de un lenguaje especial parecido al de las matemáticas. Después de algunos tanteos realizadas a la escasa edad de quince años, fue capaz de inventar un lenguaje especial para el estudio de la lógica y de aplicarlo para descubrir tipos de inferencia que hasta su tiempo habían sido desconocidos.

Desgraciadamente, los escritos de Leibniz sobre la deducción permanecieron ignorados en su mayor parte. Descorazonado por la incompreensión con que fueron recibidas sus primeras publicaciones, decidió trabajar sólo para su propio placer intelectual y guardó en cajones todo lo que escribía sobre la inferencia. Y debido a este incidente desgraciado, los filósofos siguieron creyendo que Aristóteles había descubierto todo lo que había que descubrir sobre la inferencia o deducción. El gran filósofo Kant, posterior a Leibniz, a pesar de su innegable genio, sostuvo que todo lo que podía descubrirse sobre la inferencia estaba ya descubierto y predijo que no podría descubrirse nada de importancia en el futuro. Sin embargo, apenas 39 años después de su muerte, dos filósofos y matemáticos ingleses, Georges Boole y Augustus De Morgan volvieron a descubrir todo lo que había descubierto Leibniz y fueron más lejos todavía. Debido a que la época era diferente y a que se había superado en gran parte el dogmatismo que existía aún en la época de Leibniz, sus trabajos fueron acogidos con

equivocación
de Kant

mayor comprensión, aunque eran tan revolucionarios que, en un principio, encontraron fuerte resistencia, especialmente en Europa continental.

Lo admirable de la obra de Boole y de De Morgan es que muestra cómo la razón humana es siempre la misma a través de la historia. En efecto, hemos visto cómo los megáricos descubrieron ciertas formas de inferencia que fueron casi desconocidas en la antigüedad. Luego los medioevales volvieron a descubrir las mismas cosas y fueron más lejos que ellos. Leibniz, sin conocer nada de lo que habían hecho sus antecesores, volvió a descubrir lo mismo y a avanzar nuevamente más lejos. Y nuevamente Boole y De Morgan, sin conocer lo que habían hecho los megáricos, los medioevales y Leibniz, volvieron a encontrar las mismas cosas y pudieron avanzar más lejos que todos ellos. Pero hay algo aún más admirable: Boole y De Morgan trabajaron de manera independiente, sin saber lo que cada uno estaba haciendo. Y casi el mismo día publicaron sus respectivos libros, en los que abordaban temas muy parecidos y proponían métodos muy similares. Todo esto prueba que la razón humana es la misma a través de la historia y que posee una especie de movimiento ascendente que, dentro de una línea común, va progresando cada vez más de manera indefinida y con fuerza incontenible.

Tanto Boole como De Morgan crearon un lenguaje especial para el estudio de la inferencia, llamado lenguaje formalizado, y fueron capaces de descubrir una cantidad asombrosa de nuevos tipos de inferencia o deducción. Pero como fueron los iniciadores, sus trabajos tenían una serie de defectos que era necesario superar. En el último tercio del siglo pasado, las teorías de Boole y De Morgan comenzaron a difundirse y a perfeccionarse, y gracias a los trabajos de Peano, Frege, Couturat, Pierce y sobre todo Schröder, la teoría de la inferencia o deducción comenzó a adquirir su forma moderna, es decir, la forma que tiene hoy día.

En la primera década del presente siglo era tal la cantidad de tipos de inferencia que se habían descubierto, que era imprescindible hacer una sistematización. Esta sistematización, que exigió un esfuerzo verdaderamente gigantesco, fue llevada a cabo por dos grandes

Boole y De Morgan: creadores del moderno lenguaje formalizado de la lógica

unidad del pensamiento a través de la historia

Schroeder y Frege: forma moderna de la teoría de la inferencia

Russel y Whitehead: sistematización de las inferencias y su aplicación a los teoremas matemáticos

filósofos: Bertrand Russell y Alfredo Whitehead. Los trabajos de estos dos grandes pensadores fueron publicados en una obra monumental, que consta de tres enormes volúmenes, denominada *Principia Mathematica*. El nombre de la obra se deriva del hecho que Russell y Whitehead no sólo reunieron y sistematizaron todo lo conocido en la época sobre los diversos tipos de inferencia, sino que fueron capaces de mostrar cómo se aplicaban estos diversos tipos a la derivación de los teoremas de todas las ciencias matemáticas, tanto elementales como superiores.

La importancia de la obra de Russell y Whitehead ha sido decisiva en la historia del estudio de la inferencia. Gracias a ella fue posible estudiar a fondo la manera como se aplica la deducción a las matemáticas, y comprender mejor la esencia de la razón humana. El contenido de *Principia Mathematica* fue tan extenso, su exposición tan pedagógica, su sistematización tan completa que, desde que se publicó, tuvo una repercusión formidable y originó una serie de profundos estudios sobre la inferencia y las maneras de aplicarla.

Desde la publicación de *Principia Mathematica* hasta nuestros días han sucedido muchas cosas. El estudio de la inferencia ha crecido de tal manera que hoy día es imposible ya dominar por completo la bibliografía. De manera constante se publican nuevas y audaces investigaciones que muestran tipos insospechados de inferencia, aplicaciones originales, problemas insondables. El estudio de la inferencia por medio de los métodos modernos ha mostrado que la razón humana es una facultad mucho más complicada y mucho más sutil de la que se creyó tradicionalmente y que es necesario revisar las tesis clásicas sobre su esencia y sus posibilidades. Estamos actualmente, debido al impacto tremendo de los nuevos descubrimientos sobre la inferencia, en una etapa revolucionaria del pensamiento humano que está conduciendo a la creación de una filosofía completamente nueva que explora horizontes más amplios y profundos que los que el hombre vislumbró en el pasado.

Aunque la inmensidad de los trabajos realizados hace imposible dar una idea, siquiera aproximada, de la fecundidad de los modernos estudios sobre la inferencia, podemos hacer algunas referencias orien-

tadoras. Después de la obra de Russell y Whitehead, se descubrió que, aunque en general todo lo expuesto en ella era correcto, existían sin embargo oscuridades y dificultades no resueltas. El estudio de los problemas descubiertos mostró que se trataba de escollos mucho más serios de lo que pareció en un principio y que para superarlos era necesario someter el lenguaje humano, sobre todo el lenguaje especial empleado por las teorías científicas como las matemáticas y al mismo lenguaje especial empleado por la lógica, a un estudio mucho más profundo que todo lo realizado en épocas anteriores. El genial investigador que realizó este trabajo por vez primera fue el matemático y lógico alemán David Hilbert. Cuando publicó su obra, produjo un impacto tan o más grande que los mismos Russell y Whitehead, e inauguró una época totalmente nueva en el estudio de la inferencia. Hilbert mostró que los defectos de la obra de Russell y Whitehead se debían a falta de rigor en el empleo del lenguaje y que para poder estudiar la inferencia o deducción con una exactitud que no permitiera nuevos errores era necesario crear un método especial que en la actualidad se denomina "metateoría", "metaciencia" o "metalingüística"¹. Los trabajos de Hilbert dieron origen a una serie de investigaciones notables, algunas de las cuales mostraron resultados sensationales y revolucionarios, como por ejemplo los de Kurt Gödel y los de Alfred Tarski, aún jóvenes y en plena productividad, considerados los dos lógicos más grandes de los últimos tiempos.

Hilbert y la
metateoría
Gödel y
Tarski

1 Hilbert y sus discípulos denominaron a su método "metamatemática". Ello se debió a que sólo estudiaron el lenguaje matemático. Pero en la actualidad se considera que el método de Hilbert puede aplicarse a cualquier tipo de teoría que emplee un lenguaje con sentido y con reglas de sintaxis. Por eso se denomina "metateoría", "metaciencia" o "metalingüística".

Ejercicios

1) Decir si las siguientes oraciones son o no son proposiciones:

- a) Julio César era un general romano.
- b) El capitán Maxwell será jefe de la astronave X-A-79.
- c) ¿Cuándo llegará el capital Maxwell a Marte?
- d) ¿Qué te pasó el otro día?
- e) ¡Dios mío! ¡Ayúdame!
- f) Todo ciudadano varón, al cumplir los 21 años, debe hacer su servicio militar.
- g) Oro no es, plata no es, abre la cortinita y verás lo que es.

2) Decir si las siguientes deducciones son o no son correctas.

- a) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 6$.
- b) Si $a + b = c$, entonces $b + a = c$.
- c) Si todos los hombres son mortales, entonces algunos hombres son mortales.
- d) Si algunos hombres son mortales, entonces todos los hombres son mortales.
- e) Si ningún abogado es médico, entonces ningún médico es abogado.
- f) Si todos los hombres son mortales y Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.
- g) Si algunos abogados son médicos y si algunos médicos son ingenieros, entonces, algunos abogados son ingenieros.
- h) Si ningún ingeniero es violinista y algunos abogados son violinistas, entonces ningún ingeniero es abogado.
- i) Si ningún santo es pecador y algunos pecadores no son crueles, entonces algunos santos no son crueles.

- 3) Partiendo de las siguientes proposiciones, ¿qué inferencias puede hacerse?
- a) La recta A es paralela a la recta B.
 - b) Ningún hombre es inmortal.
 - c) Todos los ingleses son flemáticos y algunos ingleses son filósofos.
 - d) A es más alto que B y B es más alto que C.
 - e) Juan es amigo de Carlos y Carlos es amigo de José.
 - f) La Alianza le gana a la U y la U le gana al Municipal.
 - g) A es divisible por B y B es divisible por C

Segunda Parte

ELEMENTOS DE LOGICA FORMAL

Capítulo II

LA LOGICA Y EL LENGUAJE

§ 6. *Definición de la Lógica.* Los análisis efectuados hasta aquí, necesarios para comprender lo que es la inferencia, hacen ahora posible dar una definición de la lógica que sea a la vez rigurosa y perfectamente clara. *La lógica es la disciplina que estudia la inferencia o deducción.*

la lógica
el estudio
de la in-
ferencia

La lógica, como sucede en todas las ciencias, consta de varias partes. Hay una parte general que estudia lo que es la inferencia. Esto es precisamente lo que hemos iniciado en las páginas 28 y sgts. En esta parte general se estudia los rasgos esenciales de toda inferencia, las condiciones de las inferencias correctas, la verdad y la falsedad lógicas, etc. Viene luego un estudio particular de la inferencia, es decir, un estudio sistemático de sus diversos tipos o especies, de las divisiones y subdivisiones entre estos tipos, de las relaciones entre ellos, etc. Y hay, por último, un estudio de las diferentes aplicaciones que se puede dar a la inferencia, es decir, de la manera como empleamos la inferencia o deducción en las diversas ciencias, en la vida diaria, en las realizaciones técnicas o en cualquier otra circunstancia.

§ 7. *Lenguaje y pensamiento.* Antigualmente se definía a la lógica como la ciencia del pensamiento correcto o de las leyes generales del pensamiento, etc. De una manera u otra se relacionaba a la lógica con el pensamiento. Si se va al fondo de lo que es la inferencia o deducción, se ve de inmediato que la lógica está íntimamente relacionada con el pensamiento. En efecto, la inferencia es una relación entre proposiciones mediante la cual de la verdad de unas se deriva la verdad de otra. Una proposición es una expresión que tiene una propiedad fundamental: es verdadera o falsa. Pero además de tener esta propiedad, una proposición tiene muchas otras propiedades. Una de las más importantes es que *significa siempre algo*. Una proposición nos dice siempre alguna cosa; se refiere siempre a una situación determinada, a algún aspecto del mundo. Si una proposición no nos dijera nada, no sería proposición. La significación de las proposiciones es la condición de su verdad y de su falsedad. Para saber si una proposición es verdadera o falsa debemos saber antes qué cosa es lo que significa.

Así, mientras no sepamos qué cosa significa la proposición "*Die Erde ist rund*", enunciada en alemán, no podemos saber si es verdadera o falsa. Pero apenas sabemos que esta proposición nos dice: "La Tierra es redonda" podemos afirmar que es verdadera. Ahora bien, para comprender el significado de una proposición tenemos que pensar, tenemos que realizar un acto mental llamado *comprensión o intelección*. Expresarse por medio del lenguaje es pues lo mismo que pensar. En consecuencia realizar inferencias o deducciones es también pensar. Y por eso la lógica está relacionada de manera directa con el pensamiento. (1)

1 En el capítulo sobre El pensamiento correcto, veremos como la corrección del pensamiento depende de la lógica.

Sin embargo, cuando uno quiere saber con claridad qué cosa es un pensamiento se encuentra con dificultades muy grandes. Es fácil conocer algunos caracteres esenciales del pensamiento, a saber: que no es una actividad sensible como la visión, la respiración o la marcha. Los pensamientos no pueden observarse por medio de los sentidos. Son por eso manifestaciones intelectuales, de la pura inteligencia. Pero cuando uno quiere saber más cosas sobre el pensamiento, de inmediato comienzan las dificultades. Por ejemplo, pensemos sobre Napoleón. Cuando pensamos sobre Napoleón, nos imaginamos siempre su cara o su figura. Pero esta imagen no es un pensamiento. Las imágenes no son pensamientos. Puede pensarse sobre objetos que no tienen imagen, como es el caso de $\sqrt{2}$. Nadie ha visto jamás la imagen de $\sqrt{2}$. En efecto, toda imagen tiene forma y tiene color. Pero $\sqrt{2}$ no tiene ni forma ni color. Su forma no es el símbolo que aparece en el papel, puesto que podemos expresarla por medio de otros símbolos como 1,414 ó como $2^{\frac{1}{2}}$ etc. Tampoco tiene color. En realidad, $\sqrt{2}$ es un número y los números no tienen ni forma ni color.

dificultad para comprender qué cosa es el pensamiento

El estudio del pensamiento lleva pues siempre a graves dificultades que no pueden resolverse definitivamente. Todo el mundo sabe, de manera vaga, qué cosa es el pensamiento. Sabe que cuando se comprende la significación de una palabra, de una frase, de una oración, se piensa. Sabe que cuando se comprende un teorema de matemáticas, se piensa. Sabe que cuando se estudia o cuando se medita sobre cualquier problema, se piensa. Pero cuando se trata de determinar de manera precisa, exacta, qué cosa es eso tan importante que llamamos pensamiento, se cae en un mar de dificultades. *El estudio del pensamiento es uno de los aspectos más profundos y problemáticos de la filosofía.*

Debido a que los filósofos clásicos definían la lógica como el estudio del pensamiento correcto o del pensamiento verdadero, etc., caían en grandes dificultades y nadie sabía con precisión lo que era la lógica, porque nadie sabía de modo preciso lo que era el pensamiento. En cambio la definición moderna es precisa, rigurosa y clarísima. La lógica es el estudio o teoría de la inferencia. La inferencia es una relación entre la verdad de las proposiciones, mediante la cual se deriva la verdad de las unas de la verdad de las otras. La definición de la lógica como el estudio de la inferencia se sitúa en el plano del *lenguaje*, y por eso es clara, porque todo el mundo puede reconocer una proposición hablada o escrita, y todo el mundo puede saber sin ningún lugar a dudas lo que significa pasar de la verdad de una proposición a la verdad de otra proposición. Al hacer esta operación, al realizar inferencias, se piensa; al enlazar proposiciones, es indudable que se enlazan pensamientos. Pero para saber cuándo es posible pasar de la verdad de una o más proposiciones a la verdad de otra proposición, no es necesario precisar previamente lo que es el pensamiento, basta saber cómo deben relacionarse unas proposiciones con otras.

definición
la lógica
de ser lin-
ística

§ 8. *El lenguaje formalizado.*

El lenguaje formalizado surge cuando las relaciones que se desean estudiar son complicadas. Si lo que se quiere estudiar es simple, entonces no se necesita de un lenguaje especial. Así, si todas las inferencias fueran como los ejemplos que hemos dado en la página 28 y siguiente, no sería necesario emplear ningún lenguaje especial para estudiarlas, pues es muy fácil analizarlas. Pero si avanzamos algo más y nos pre-

guntamos cómo se hace en la práctica de la ciencia para pasar de la verdad de las proposiciones primitivas a la gran cantidad de verdades científicas derivadas por medio de la inferencia, la cosa se complica enormemente. Todos hemos estudiado en Geometría, por ejemplo, numerosos teoremas. Estos teoremas consisten en pasar de la verdad de unas proposiciones que se llaman *axiomas* o *postulados* a la verdad de otras proposiciones que se llaman *teoremas*. Todos recordamos que hay teoremas muy simples, muy fáciles de aprender. Hay también teoremas regulares y teoremas muy difíciles. Pues bien, basta que nos preguntemos por el tipo de inferencia que permite pasar de los axiomas a los teoremas en los casos más simples, para que encontremos relaciones sumamente complicadas. *Las demostraciones matemáticas más simples y fáciles, se basan en inferencias complicadas.* Por eso es imposible analizarlas por medio del lenguaje común. Es necesario emplear un lenguaje especial, llamado *lenguaje formalizado o simbólico*.

Esta es la razón fundamental que exige el empleo de un lenguaje formalizado para estudiar la lógica. Pero hay además otra razón muy importante, casi tan importante como la primera: la vaguedad del lenguaje corriente. El lenguaje corriente, el que hablamos todos los días, se denomina *lenguaje natural*. Se llama así porque no ha sido inventado por ningún hombre en particular, es connatural al ser humano. El hombre se distingue del animal por muchas cosas, pero sobre todo por el uso del lenguaje. El lenguaje es, de todas las riquezas que tiene el hombre, probablemente la más importante. Gracias al lenguaje ha podido crear la maravillosa cultura que lo caracteriza, la maravillosa cultura integrada por la ciencia, el arte, la religión, la filosofía, la política, la economía, la técnica y tantas otras cosas más. Todas, absolutamente todas las grandes creaciones realizadas por el

las inferencias complicadas exigen el lenguaje formalizado

la vaguedad del lenguaje natural exige el lenguaje formalizado

hombre a través de la historia, se basan en el lenguaje.

Los lenguajes naturales se emplean para muchos fines. Entre estos fines está el conocimiento, la ciencia, el saber. Pero existen otros fines además de éstos. El lenguaje se emplea también para producir emociones, para avisar del peligro, para dar órdenes, para realizar ritos religiosos, para producir belleza poética y para innumerables fines diferentes. Debido a su enorme riqueza y a que puede emplearse para los fines más diversos, el lenguaje es un medio muy eficaz pero también muy vago y engorroso. Hay frases que son muy claras y simples, pero hay otras que son muy vagas y otras que son muy largas y pesadas. Las expresiones vagas y engorrosas son una de las más graves rémoras del conocimiento científico y filosófico. Hay ciertas verdades científicas muy simples, pero que cuando se expresan mediante el lenguaje natural parecen largas y complicadísimas. Por ejm, una operación cualquiera de aritmética.

finalidad de
los lenguajes
formalizados

Es para evitar estas dificultades que ha sido necesario crear los lenguajes formalizados. Los lenguajes formalizados tienen una doble finalidad: *lograr la simplicidad y la precisión de las expresiones*. Por esta razón, ellos son los lenguajes que emplean las diversas disciplinas científicas. Ninguna ciencia puede progresar mediante el lenguaje corriente. Para que el conocimiento científico pueda avanzar sobre camino seguro debe emplear un lenguaje simple y riguroso. Y esto sólo puede lograrse por medio de un lenguaje formalizado.

Pero elaborar un lenguaje formalizado no es tarea fácil. Cuando el hombre trata de crear un lenguaje especial, con su vocabulario, sus giros y su gramática, se encuentra ante una serie de problemas cuya solución es a veces extraordinariamente difícil. Por esta razón sólo las ciencias más perfectas poseen hoy día un lenguaje formalizado, como las matemáticas y la física. *Es pre-*

cisamente el hecho de que posean un lenguaje formalizado lo que ha hecho posible su enorme progreso. Las demás ciencias poseen lenguajes que son formalizados en parte, como la biología, o sencillamente expresan sus conocimientos por medio del lenguaje común, como la etnología, la psicología y la historia. En estos últimos años, los científicos y los filósofos han adquirido una profunda comprensión de lo que es un lenguaje formalizado y han llegado a la conclusión de que mientras una ciencia no posea un lenguaje formalizado para expresar sus conocimientos no puede ser rigurosa ni puede llegar muy lejos. Por eso las ciencias que más han progresado son las matemáticas y la física y después la química.

Este es también el caso de la lógica. Mientras la lógica empleó para expresar sus conocimientos el lenguaje corriente casi no progresó. Permaneció estancada siglo tras siglo. Pero desde hace ya más de un siglo los lógicos lograron crear un lenguaje formalizado de extraordinaria perfección. Es un lenguaje parecido al de las matemáticas, aunque no debe confundirse con él, y es no sólo tan perfecto como el lenguaje matemático, sino aún más perfecto. El lenguaje formalizado de la lógica *es el más perfecto de todos los lenguajes formalizados existentes.* Por eso la lógica ha pasado del estancamiento a un crecimiento verdaderamente increíble.

¿Cuáles son los caracteres de los lenguajes formalizados? ¿En qué se distinguen los lenguajes formalizados de los lenguajes naturales o corrientes? Sería demasiado largo describir en detalle lo que es el lenguaje formalizado. Pero, para los fines del presente libro, basta enunciar los rasgos más importantes.

La primera propiedad que debe observarse es que los lenguajes naturales son antes que nada orales, *ha-* caracteres de los lenguajes formalizados
blados, mientras que los lenguajes formalizados son antes que nada escritos. Muchos lenguajes naturales, co-

mo los de las tribus salvajes, carecen de escritura. En cambio todos los lenguajes formalizados tienen siempre una escritura muy especial, son antes que nada escritos. No puede concebirse un lenguaje formalizado que no sea escrito.

En segundo lugar, los lenguajes naturales tienen una gama expresiva sumamente amplia. Permiten expresar cualquier cosa. Permiten expresar emociones, conocimientos, órdenes, advertencias, ruegos, sentimientos, actitudes, etc. Por eso mismo son a veces tan vagos, pues el exceso de amplitud expresiva hace imposible que puedan librarse de ambigüedades. En cambio, *los lenguajes formalizados sólo expresan conocimientos*. Todos ellos, sin ninguna excepción, han sido elaborados con fines científicos, es decir, para expresar conocimientos de la mejor manera posible.

En tercer lugar, los lenguajes naturales tienen escritura fonética, mientras que *los lenguajes formalizados tienen escritura ideográfica*. La escritura fonética consiste en reproducir los sonidos de las palabras habladas. Las palabras habladas expresan directamente las cosas, las situaciones y las ideas. Para hacer esto se valen de sonidos. Pero las palabras escritas de los lenguajes naturales no expresan de manera directa las cosas, situaciones o ideas, sino que expresan las palabras habladas. Por esto se llaman escrituras fonéticas, porque en griego *foné* significa *voz*. La escritura fonética reproduce pues al lenguaje oral y es de esta manera *indirecta* como logra expresar las cosas, las situaciones y las ideas. En cambio, los lenguajes formalizados son *ideográficos*, es decir, que expresan *directamente*, por medio de sus símbolos, las cosas, las situaciones y las ideas. Por ejemplo, el número uno se expresa en el lenguaje natural mediante la palabra "uno". Esta palabra tiene un sonido determinado. La palabra escrita "uno" expresa dicho sonido, y a tra-

vés de dicho sonido, expresa el número uno. En cambio la aritmética tiene un lenguaje formalizado, y en este lenguaje, para expresar el número uno, se emplea un símbolo que no reproduce ningún sonido, sino que se refiere directamente a dicho número. *Este símbolo es el guarismo "1".*

En cuarto lugar, los lenguajes naturales tienen una gramática incompleta y con reglas llenas de excepciones, mientras que *los lenguajes formalizados tienen siempre una gramática completa y sus reglas jamás tienen excepciones.* La gramática que hemos estudiado en los primeros años de Media es la gramática de la lengua castellana, es decir, de un lenguaje natural. Ahora bien, a pesar de que el estudio de la gramática es bastante difícil, porque encontramos en él una infinidad de reglas, se trata de una gramática sumamente imperfecta e incompleta. Veamos por ejemplo la sintaxis. La sintaxis es la parte de la gramática que nos enseña las reglas para unir las palabras y las frases. Así, de acuerdo con la sintaxis de la lengua española, podemos decir: "los alumnos son estudiosos", pero no "el alumno son estudiosos", porque según la sintaxis debe haber acuerdo de género y número entre el sustantivo y el adjetivo. Pero de acuerdo con las reglas de sintaxis que se encuentran en la Gramática de la Academia de la Lengua es difícil saber si puede decirse una frase como ésta: "el color rojo es inteligente". Cualquier entendido en gramática se hallará en fuertes dudas si se le plantea este problema. Y así como este caso hay mil más que consituyen problemas prácticamente insolubles en relación a la gramática de los lenguajes naturales. En cambio, en los lenguajes formalizados jamás puede haber dudas. En ellos todo está previsto. En estos lenguajes no es posible escribir una frase como la anterior porque es un *sin-sentido*.

§ 9. *Lenguaje formalizado y lógica formal.* Hemos estudiado la diferencia entre los lenguajes naturales y los lenguajes formalizados. Hemos analizado cuáles son las principales propiedades de los lenguajes formalizados y hemos explicado por qué su empleo es imprescindible para desarrollar las ciencias, especialmente las matemáticas y la lógica. Pero no hemos dicho por qué este lenguaje se llama *formalizado*. Podría llamarse lenguaje simbólico o lenguaje exacto o cualquier otra cosa parecida, porque, en efecto, todo lenguaje formalizado es simbólico y preciso. Sin embargo, se llama formalizado porque su propiedad más importante es la de revelar la forma de las proposiciones y de las inferencias.

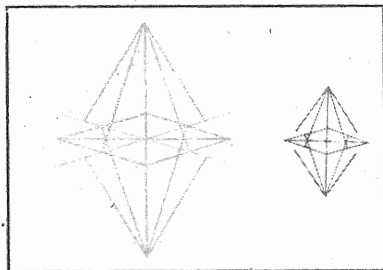
Al hacer esta afirmación no hemos ganado mucho al parecer, porque no sabemos qué cosa es la forma del lenguaje ni la forma de la inferencia. El término "forma" usado en el lenguaje natural, es vago, impreciso, difícil de analizar. En cambio, en lógica se emplea con un sentido preciso y único. Entre los diversos significados que tiene el término "forma" en los lenguajes naturales destaca el significado de estructura y es precisamente en este sentido que se emplea en relación al lenguaje y a la lógica. Al decir pues que el lenguaje de la lógica es un lenguaje formalizado, se quiere decir que se trata de un lenguaje que revela su propia estructura.

Pero todavía no sabemos bien lo que significa el término "estructura", aunque, de manera intuitiva, tenemos más o menos una noción de dicho significado. En primer lugar, la palabra estructura se refiere siempre a algo compuesto. Esto es fundamental. Si un objeto es completamente simple, no tiene estructura. Para que un objeto tenga estructura, debe estar compuesto por varios elementos. Así, en geometría, el punto, que es un elemento absolutamente simple, no tiene ni puede tener estructura. Pero las figuras geométricas sí tienen estructura, porque están compuestas de puntos.

Sin embargo, no basta que un objeto esté compuesto de elementos para que tenga estructura. Para esto los elementos que integran el objeto deben relacionarse de alguna manera muy definida. De modo general, puede decirse que para que un objeto tenga estructura, debe haber un orden determinado entre los elementos que lo integran.

Estas dos propiedades son esenciales a toda estructura: el objeto debe ser compuesto y debe haber un orden entre sus elementos. Obsérvese que estas dos propiedades se refieren únicamente a los elementos como integrantes o componentes de la estructura, pero no se refieren a las cualidades o propiedades de dichos elementos. Lo que interesa de una estructura es la re-

lación de unos elementos con otros, pero no las cualidades intrínsecas de estos elementos. Así, si contemplamos los dos gráficos:



vemos de inmediato que, aunque difieren en una serie de propiedades, como el tamaño, el color, el lugar de la página donde están impresos, etc., tienen sin embargo exactamente la misma estructura, porque tienen el mismo número de elementos, y el mismo orden entre estos elementos. Esta comprobación nos indica que el concepto de número también es propiedad esencial de la estructura. Para que dos estructuras sean idénticas, deben tener el mismo número de elementos. De otra manera no podrán ser idénticas. Podrán ser parecidas, pero no idénticas.

Y ahora tenemos ya una visión más clara y precisa de lo que es una estructura. Para que un objeto tenga una estructura debe ser compuesto, debe tener un número determinado de elementos y debe existir un orden entre ellos. Composición, número y orden son las cualidades esenciales de toda estructura.

Si, como manifestamos al comienzo, entendemos que el término "forma", significa exactamente lo mismo que "estructura", comprendemos por qué se llama formalizados a los lenguajes simbólicos que emplean la matemática y la lógica. Son formalizados porque han sido elaborados especialmente para hacer posible que, por el sólo hecho de emplearlos o manejarlos, se revele su estructura o forma de manera patente y completa. Formalizar un lenguaje es precisar y arreglar de tal modo los símbolos empleados que sea posible captar sin ninguna oscuridad, sin ninguna posibilidad de error, su estructura.

Como después veremos, el razonamiento o inferencia, la deducción, depende de manera directa de la estructura o forma de las proposiciones cuya verdad se relaciona. Por este hecho, por la razón profunda de que todo proceso deductivo, toda inferencia se basa en relaciones estructurales o formales, y porque siempre es necesario emplear cierto tipo de formalización para estudiar estas relaciones, es que la lógica que estudia la relación de verdad entre las proposiciones, se llama también lógica formal.

propiedades
esenciales de
la estructura

Ejercicios

- 1) Decir si las siguientes expresiones están o no formalizadas.
 - a) Todos los hombres son animales racionales.
 - b) $1 + 1 = 2$.
 - c) $x + y = 2$.
 - d) Lima es la capital del Perú.
 - e) Juan es arquitecto.
 - f) S es arquitecto.
 - g) S es P.
- 2) Formalizar sobre la base de lo poco que hemos estudiado en el presente capítulo las siguientes expresiones.
 - a) Dos más dos igual cuatro.
 - b) La recta A es paralela a la recta B.
 - c) Sócrates es filósofo.
 - d) Anastasio es mayor que Cenobio.
 - e) Si a es igual a b y b es igual a c, entonces, a es igual a c.
 - f) Si x es igual a y entonces y es igual a x.

Capítulo III

LOS ELEMENTOS DE LA INFERENCIA:
LOS TERMINOS

§ 10. *Las proposiciones como elementos de la inferencia.* Una inferencia no puede tener menos de dos proposiciones. Las inferencias que constan de dos proposiciones se denominan *inferencias inmediatas*. Por ejemplo:

“Si todos los hombres son mortales, entonces algunos hombres son mortales”.

El ejemplo es muy trivial. La inferencia inmediata es con frecuencia trivial, porque cuando las proposiciones son simples, la derivación de la verdad de la segunda proposición, partiendo de la verdad de la primera, es siempre evidente. Pero no todas las inferencias inmediatas son tan triviales como la del ejemplo anterior. Cuando intervienen proposiciones negativas se necesita ya un mayor esfuerzo para captarlas. Por ejemplo:

“Si ningún aviador es empresario teatral, entonces ningún empresario teatral es aviador”.

Aquí la inferencia sigue siendo trivial, pero es algo más interesante que en el caso anterior.

Cuando la inferencia tiene más de dos proposiciones, se denomina *inferencia mediata* y sus resultados son mucho menos triviales. Cuando tiene tres proposiciones (de cierto tipo que después estudiaremos), se denomina *silogismo*. Cuando una inferencia tiene más de tres proposiciones, cuando, por ejemplo, de la verdad de tres o cuatro proposiciones se deriva la verdad de

otra proposición, la inferencia pierde su carácter trivial y adquiere un interés que con frecuencia puede ser muy grande. La mayoría de las inferencias realizadas en ciencias como las matemáticas, la física, y en la filosofía, tiene este carácter.

Trátase de una inferencia inmediata o de una inferencia mediata, de una inferencia trivial o interesante, simple o complicada, puede siempre observarse una cosa: la inferencia está integrada por proposiciones. *Toda inferencia o deducción consta siempre de una unión o combinación de proposiciones.* Así como los organismos vivos constan de células, y los cuerpos de moléculas, así las inferencias constan de proposiciones. *Las proposiciones son los elementos de las inferencias.*

§ 11. *Los términos como los elementos de la proposición.* Pero a su vez las proposiciones no son simples. Las proposiciones son los elementos que integran la inferencia, pero a su vez están integradas por elementos. Estos elementos son los *términos* o, como vulgarmente también se les llama, las *palabras*.

Así, en la primera proposición del ejemplo de inferencia inmediata de la pág. anterior: "Todos los hombres son mortales", encontramos cinco palabras o términos:

1) "Todos" 2) "los" 3) "hombres" 4) "son" 5) "mortales".

Y en la segunda proposición "Algunos hombres son mortales" encontramos cuatro palabras:

1) "Algunos" 2) "hombres" 3) "son" 4) "mortales".

Toda proposición está pues integrada por elementos que son las palabras. Este hecho no tendría mayor importancia para la lógica, es decir, para el estudio de

la inferencia, si no fuera porque muchos tipos fundamentales de inferencia dependen de manera directa de los términos que integran las proposiciones. Por eso, para estudiar la inferencia es necesario estudiar antes las propiedades de los términos.

§ 12. *Clases de términos.* Todos los términos pueden agruparse en dos grandes clases: términos *independientes* y términos *dependientes o estructurales*. Los términos independientes son aquellos que cuando se consideran aisladamente, es decir, con independencia de los otros términos, significan algo. Así las palabras “casa”, “hombre”, “mujer”, “tres”, “Julio”, “Napoleón”, “amar”, “saltar”, “estudiar”, “rápidamente”, etc., son términos independientes. A pesar de que han sido considerados aisladamente, con independencia de los demás términos, todos sabemos lo que significan. En cambio los términos “y”, “o”, “sí”, “entonces”, “empero”, “pero”, “para”, “de”, “sin embargo”, etc., son palabras dependientes o estructurales, porque no tienen significación aislada. Para que signifiquen algo deben siempre ir acompañados de otros términos, es decir, su significación depende siempre de la significación de otros términos. Los *términos dependientes* son las conjunciones y las preposiciones.

las dos grandes clases de términos

Los términos independientes son numerosísimos y corresponden a muchas clases de palabras como sustantivos, adjetivos, verbos, adverbios, etc. Desde el punto de vista de la lógica, es decir, desde el punto de vista de la función que los términos desempeñan en la inferencia, es conveniente dividirlos en las siguientes especies: *términos individuales*, *términos predicativos*¹ y *términos relacionales*.

clases de términos independientes

¹ Los términos predicativos se denominan también predicados.

Los términos individuales son los que en gramática se denominan *nombres propios*. Así "Lima", "Cuzco", "París", "Napoleón", "Aníbal", "Homero", etc., son *términos individuales*. Como su nombre lo indica, se refieren única y exclusivamente a un solo individuo o a una sola cosa. Los nombres de personas, de ciudades, de países, de accidentes geográficos, como ríos, montes, mares, etc., son nombres propios.

Los términos predicativos son los que se pueden predicar de los términos individuales, es decir, los que permiten describir las cualidades, caracteres o notas de los individuos designados por los términos individuales. Así, "hombre", "mujer", "azul", "importante", etc., son términos predicativos, porque sirven para indicar cualidades de individuos. Podemos decir, por ejemplo: "Juan es hombre", "María es mujer", "el Nilo es azul", "París es importante", etc.

La tercera clase de términos, los términos *relacionales* se emplea para relacionar a otros términos, para unirlos entre sí de alguna manera definida. Muchos verbos son relacionales y también muchos adverbios. Así, el verbo "amar" es un término relacional porque une siempre a dos términos, por ejemplo, "Pedro ama a María". Lo mismo se puede decir de todos los verbos transitivos, es decir, de todos los verbos que expresan la acción que realiza una persona o cosa y que recae en otra persona o cosa. "Querer", "estudiar", "presionar", "pagar", "leer", "boxear", etc., son términos relacionales.

§ 13. *La extensión de los términos.* Desde el punto de vista de la lógica, es decir, de la inferencia o deducción, los términos independientes tienen una propiedad de la mayor importancia: la extensión. El estudio de la extensión permite comprender muchos tipos de inferencia, algunos de los cuales son superficiales, mientras que otros son muy profundos y se emplean en una enorme cantidad de razonamientos científicos y filosóficos.

La extensión de un término se denomina también en lógica moderna *clase* o *conjunto*. Todo término independiente tiene siempre una extensión, y una clase o un conjunto que le corresponde. *La extensión (clase o conjunto) de un término es la totalidad de los objetos que dicho término designa o significa.* La mayoría de los términos independientes significan no un solo objeto sino muchos objetos. Así, la palabra *casa* no significa una sola casa, sino todas las casas que existen. La extensión del término *casa* está pues constituida por todas las casas, pero nada más que por ellas. Una máquina de coser o un elefante no pertenecen a la extensión (clase o conjunto) del término *casa*. Pero en cambio cualquier casa, sea la casa que sea, grande o pequeña, elegante o fea, alta o baja, pertenecerá a dicha extensión.

concepto
extensión
o clase

Las extensiones son muy variables, pues dependen de la cantidad de objetos que son significados por el término. Así, la extensión del término "número" es inmensa, es en realidad infinita, porque los números son infinitos. La extensión del término "rinoceronte", en cambio, es más bien pequeña, porque en el mundo hay pocos rinocerontes. Actualmente se calcula que no pasan de unos pocos cientos. Pero hay extensiones mucho más pequeñas, hay extensiones de un solo objeto. Así la palabra "París" significa una sola cosa: la capital de Francia. Cuando un término tiene una extensión integrada por un solo objeto, se dice que tiene *extensión individual*. En cambio, cuando un término tiene una extensión que contiene muchos objetos, finitos o infinitos, se dice que su extensión es genérica.

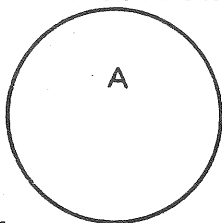
§ 14. *Relaciones entre las extensiones de los términos.* Desde que se comienza a estudiar la extensión de los términos, se descubre que pueden relacionarse de manera muy interesante. Veamos los términos: "perua-

no” y “americano” y consideremos lo que sucede con sus extensiones o clases. Advertimos que todos los peruanos pertenecen a la extensión del término peruano. Pero vemos que además de pertenecer a esta extensión, pertenecen también a la extensión del término americano. Porque el término americano se aplica a todos los seres humanos que, por su condición de nacimiento o nacionalización, son americanos, y como los peruanos son americanos, debe aplicarse a los peruanos. O sea que todos los seres humanos que pertenecen a la extensión del término “peruano” pertenecen también a la extensión del término “americano”. Esta propiedad que tienen los objetos de pertenecer a la vez a dos extensiones es muy frecuente. Así, todos los seres humanos que pertenecen a la extensión de los términos “chileno”, “colombiano”, “mexicano”, “argentino”, etc., pertenecen también a la extensión (o clase) del término “americano”. Todos los seres humanos que pertenecen a la extensión del término “francés”, pertenecen también a la clase del término “europeo”. Asimismo, si un ser humano pertenece a la clase del término “alemán” o del término “inglés”, o “sueco” o “finlandés” o “español”, pertenecerá también a la extensión del término “europeo”. De igual modo, si un objeto pertenece a la extensión del término “automóvil”, pertenecerá necesariamente a la extensión del término “máquina”. Es, como se ve, muy fácil, saber cuando un objeto cualquiera, cosa, animal o humano, por el hecho de pertenecer a la extensión o clase de un término, debe también, necesariamente, pertenecer a la extensión o clase de otro término.

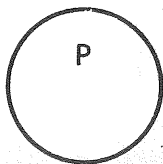
Clase de extensión de
clases
Cuando esto sucede, cuando un objeto, por el hecho de pertenecer a la extensión de un término, pertenece también a la extensión de otro término, se dice que *la extensión del primer término está incluida en la extensión del segundo*. Como las palabras “clase” y “conjunto”

significan exactamente lo mismo que “extensión”, se dice también que la clase del primero está incluida en la clase del segundo, o que el conjunto del primero está incluido en el conjunto del segundo. Entre las extensiones, o clases, o conjuntos, existe pues una relación de gran importancia: *la relación de inclusión*. La relación de inclusión es una especie de relación jerárquica. Cuando una extensión incluye a otra, tiene algo más que aquélla: es más general. Así, la extensión del término “americano” es más general que la del término “peruano”, porque la extensión de “peruano” está incluida en la extensión de “americano”.

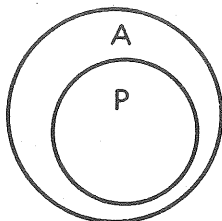
Esta relación de inclusión, de mayor a menor generalidad, puede representarse con gran precisión por medio de figuras geométricas. Si representamos la extensión o clase de un término por medio de un círculo y la clase de otro término por medio de otro círculo, es evidente que, si la extensión del primero incluye a la del segundo, el primer círculo incluirá al segundo círculo. Representemos la extensión del término “americano” por el círculo A:



y la extensión del término “peruano” por el círculo P:



Es evidente que el círculo P estará incluido en el círculo A, y tendremos:



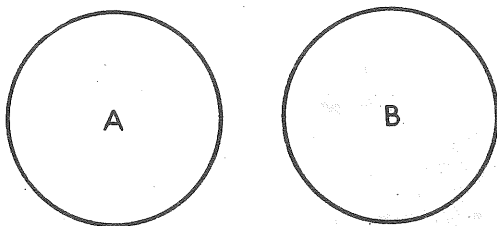
La relación de inclusión no es la única que puede existir entre las extensiones de los términos. Por ejemplo, la extensión del término “europeo” no tiene nada que ver con la extensión del término “americano”; una no está incluida en la otra. Tampoco puede decirse que las extensiones de los términos “estudiante” y “sanmarquino” estén en relación de inclusión, pero es fácil ver que existe cierta relación interesante entre ellas.

En el primer caso, cuando no hay ninguna relación positiva entre ambas extensiones, se dice que las extensiones se relacionan negativamente o que se *excluyen*. El segundo caso es más interesante, porque no cabe duda que algunas personas que pertenecen a la extensión del término “estudiante”, pertenecen también a la extensión de “sanmarquino”, pero no todas. Y viceversa, muchas personas que pertenecen a la extensión del término “sanmarquino” pertenecen también a la extensión del término “estudiante” pero no todas, porque los profesores de la Universidad de San Marcos son también sanmarquinos, pero no son estudiantes. Se ve que en este caso hay una relación que no es inclusión, sino de mutua Pertenencia parcial.

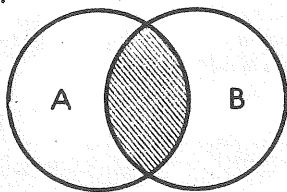
Veamos el caso de las extensiones de los términos

“tela” y “blanco”. Los objetos que pertenecen a la clase del término “tela” son todas las telas que existen; y los objetos que pertenecen a la extensión del término “blanco” son todas las cosas blancas que existen. Ahora bien, muchas telas son blancas, pero no todas las telas son blancas y, contrariamente, muchos objetos blancos, son telas, pero no todos los objetos blancos son telas. Cuando parte de la extensión de un término pertenece a la extensión de otro, se dice que entre ambas clases, ambos conjuntos o ambas extensiones hay una relación de *intersección o interferencia*.

Es también evidente que tanto la exclusión de extensiones como la intersección de extensiones puede representarse por medio de relaciones entre círculos, mediante los mismos principios que se aplican a la relación de inclusión. Cuando las extensiones y clases se excluyen, los círculos quedarán separados:



y cuando las extensiones o clases interfieren, los círculos interferirán:



En el caso de la interferencia, siempre se raya la parte común de los círculos, para mostrar que en esta Parte están representados los objetos que son comunes a ambas clases o extensiones. Regresando a nuestro ejemplo de las telas y de los objetos blancos, es claro que si un círculo representa la extensión del término "tela" y el otro representa la extensión del término "blanco", la parte rayada de la intersección representará la extensión del término compuesto "tela blanca".

la compren-
sión de los
términos
permite de-
terminar las
clases de los
términos

§ 15. *La comprensión de los términos.* Además de tener extensión, los términos tienen también *comprensión*. La comprensión se llama también *contenido o intensión*¹. La comprensión de los términos consiste en las propiedades de los objetos que pertenecen a su extensión. Todo término tiene una extensión o clase. En relación a esta extensión o clase, todos los objetos del universo quedan divididos en dos grupos: en un grupo están todos los objetos que pertenecen a la extensión y en el segundo grupo están todos los que no pertenecen a la extensión. Por ejemplo, el término "avión". En relación a su extensión, todos los objetos habidos y por haber quedan separados en dos grupos: en el primer grupo estarán los que pertenecen a la extensión de dicho término, es decir, todos los aviones, y en el segundo grupo estarán todos los objetos, sean los que sean, que no pertenecen a su extensión. Pero para hacer esta división debemos saber lo que es un avión. Si no sabemos lo que es un avión, no podemos determinar la extensión del término "avión", porque podríamos colocar en ella a sillas e incluso a hipopótamos.

1 Obsérvese que la palabra "intensión" se escribe con s y no con c. No tiene pues nada que ver con la palabra psicológica "intención".

¿Cómo sabemos lo que es un avión? Porque cuando un objeto es un avión debe poseer ciertas cualidades o propiedades, determinados caracteres. Por ejemplo, debe tener alas. Si no tiene alas, ya no es avión. Puede ser un cohete, pero no avión. Debe además ser capaz de volar, etc. Son las propiedades que tiene un objeto o cosa lo que hace posible saber si pertenece o no a determinada extensión o clase. Todo término está siempre referido por eso a estas propiedades, las designa, mienta o significa. Este conjunto de propiedades de los objetos se llama *comprensión*. Así pues, todo término tiene siempre extensión y comprensión. La comprensión y la extensión son conceptos correlativos; no se concibe que exista el uno sin el otro. Las comprensiones de los términos también se relacionan entre sí, de la misma manera que las extensiones. Hay también una inclusión, una exclusión y una intersección de comprensiones. Pero estas relaciones, aunque interesantes, son mucho menos importantes para el estudio de la inferencia que las relaciones entre las extensiones. Por eso aquí nos contentamos con mencionarlas.

Ejercicios

- 1) Clasificar los siguientes términos de acuerdo con la clasificación del § 13:
 - a) Corinto.
 - b) Aquiles.
 - c) >
 - d) que
 - e) y
 - f) Pero (¡ojo! ¡respuesta difícil!).
 - g) Entonces (¡ojo! ¡respuesta difícil!).
 - h) Blanco.
 - i) Hombre.
 - j) =
 - r) Triceratops.

- 2) Indicar cuál es la relación entre las extensiones de los siguientes pares de términos:
 - a) Americano - hombre.
 - b) Europeo - asiático.
 - c) Tío - sobrino.
 - d) Múltiplo - divisor.
 - e) Par - impar.
 - f) Abogado - médico.
 - g) Caja - Metal.
 - h) Plástico - avión.
 - i) Peruano - satélite (¡ojo! ¡difícil!).

Capítulo IV

LOS ELEMENTOS DE LA INFERENCIA: LAS PROPOSICIONES

§ 16. *Proposiciones simples y compuestas.* La clasificación más general que puede hacerse de las proposiciones, aceptada tanto en los tratados de lógica como en los de gramática, es la de *proposiciones simples y compuestas*. En la mayoría de las gramáticas se toma como criterio de división la intervención del verbo en la proposición. Una proposición que tiene un solo verbo es simple, mientras que una proposición que tiene varios verbos (por lo menos dos) es compuesta. Este criterio es correcto, pero no es útil para la lógica, es decir, para el estudio de la inferencia. Mucho más eficaz es el criterio estructural, basado en el empleo de las conjunciones. Para la lógica, una proposición que no tiene conjunciones entre sus términos integrantes es simple, mientras que una proposición que tiene por lo menos una conjunción es compuesta. Este es un criterio natural, pues, como hemos visto, las conjunciones son términos dependientes o estructurales cuya función lingüística consiste, precisamente, en unir proposiciones, en combinarlas para formar expresiones más complicadas. Por eso es evidente que cuando una proposición contiene una conjunción se trata de una proposición compuesta. Así, "El hombre es racional" es una proposición simple, mientras "El número dos es par y el número tres es impar" es una proposición compuesta por dos proposiciones simples¹.

¹ La manera como se expone el criterio de división enunciado, no es del todo rigurosa, pero es suficiente para los fines de la presente exposición.

§ 17. *Proposiciones predicativas y relacionales.* Las proposiciones simples se dividen en predicativas y relacionales. Las proposiciones predicativas son las que atribuyen o niegan un predicado a un sujeto, es decir, afirman o niegan que una determinada persona, animal o cosa, posee una propiedad o cualidad. Así, "Juan es arquitecto", "el número tres es impar", "el hombre es racional", "el número dos no es impar", "Pedro no es abogado", son proposiciones predicativas. Lo fundamental de las proposiciones predicativas es que distinguen siempre entre un sujeto, una cosa bien definida y una propiedad o cualidad que pertenece a dicho sujeto o no pertenece a él. Hay un sujeto que es aquello que tiene la propiedad (o no la tiene) y un predicado que es la propiedad que tiene (o no tiene) el sujeto. El sujeto y el predicado son de diferente categoría gramatical, o por lo menos funcionan siempre con diferente categoría gramatical. El sujeto es un nombre propio o funciona siempre como sustantivo, y el predicado es un adjetivo o funciona siempre en calidad de adjetivo.

La proposición predicativa tiene muchas formas, pero todas ellas pueden reducirse a las que hemos considerado, formadas con el verbo "ser", que sirve para indicar que tal cualidad pertenece a tal sujeto (cuando no le pertenece se antepone el adverbio *no* al verbo ser). Así, "Doris es inteligente" tiene sujeto "Doris", predicado "inteligente" y el verbo "ser" en la tercera persona del presente del indicativo.

Las proposiciones relacionales son muy diferentes de las predicativas. No consisten en atribuir una cualidad a algún sujeto, sino *en relacionar dos sujetos*. No tienen un sujeto y luego un predicado o atributo que se atribuye al sujeto por medio del verbo ser, sino dos sujetos que se relacionan de alguna manera determinada. Por ejemplo, "Juan ama a María", "Trujillo está al Norte de

diferencia entre las proposiciones predicativas y las relacionales

Lima", "cuatro es mayor que tres", etc. Obsérvese que en la primera proposición no se trata de atribuir una cualidad solamente a Juan; no se dice que es inteligente o trabajador, o bueno o malo; se dice que se relaciona con María por medio del amor. Tampoco se atribuye ninguna cualidad exclusiva a María, sólo se dice que se relaciona con Juan. El verbo "amar" sirve para expresar una relación, una relación entre dos sujetos humanos. Cuando se dice: "Trujillo está al Norte de Lima", tampoco se dice que Trujillo tiene una propiedad o cualidad, sencillamente se le relaciona con Lima mediante una relación geográfica o espacial: *está al Norte de*. Y asimismo, cuando se dice "cuatro es mayor que tres" no se predica una cualidad de un solo objeto, como por ejemplo, que cuatro es un número par, o que cuatro es un adjetivo numeral, o cualquier otra propiedad que pertenezca a cuatro. Lo que se hace es relacionar el número cuatro con el número tres, y el número tres con el número cuatro.

La diferencia fundamental entre las proposiciones predicativas y las relacionales es que en las predicativas el sujeto y el predicado son de diferente naturaleza, desempeñan una función diferente en la proposición, mientras que en las proposiciones relacionales los dos sujetos que se relacionan desempeñan la misma función: ambos sujetos se relacionan entre sí, se relacionan mutuamente, no se reducen a ser el uno la propiedad del otro. Por eso en las proposiciones relacionales los dos sujetos tienen la misma categoría gramatical, y son los dos sustantivos o desempeñan una función de sustantivo. Así en "Juan ama a María", Juan y María son ambos nombres propios, Juan no es una cualidad de María ni María es una cualidad de Juan. Ambos son dos sujetos, dos personas que se relacionan de alguna manera. Lo mismo Lima y Trujillo, ambos son nombres propios

que se relacionan por medio de una relación geográfica. En cuanto a la proposición numérica, se trata de dos adjetivos numerales que funcionan como sustantivos, es decir, como sujetos, y que se relacionan por medio de una relación de orden.

§ 18. *Proposiciones coligativas*. Las proposiciones compuestas son aquellas que contienen conjunciones. Estas proposiciones se denominan también *proposiciones coligativas*. *Coligativo* es un adjetivo derivado del verbo *coligar* que deriva de los términos latinos "*cum*", que significa "con" y "*ligare*" que significa "ligar", "juntar", "unir". "Coligativo" quiere decir, pues, aquello que liga, que conecta, que une una cosa con otra. Por eso las proposiciones compuestas se denominan "coligativas" porque son proposiciones que unen unas proposiciones con otras, que las combinan o juntan, por medio de las conjunciones.

las proposi-
ciones coli-
gativas y sus
diversos
tipos

Hay numerosos tipos de proposiciones coligativas o compuestas, pero los más importantes, a los que se pueden reducir todos los demás, son sólo tres. A través de diversos ejemplos, en los capítulos anteriores, nos hemos ya referido a ellos. Pertenecen al primer tipo todas las proposiciones compuestas por medio de la conjunción "y". Estas proposiciones se denominan *proposiciones conjuntivas*. Las del segundo tipo son todas las que se componen por medio de la conjunción "o" y se denominan *disyuntivas*. Las del tercer tipo son todas aquellas que se componen por medio de la conjunción compleja "si... entonces" y se denominan *proposiciones implcativas, condicionales o hipotéticas*.

Es necesario hacer notar que las proposiciones compuestas en las que las dos proposiciones componentes se unen por medio de la conjunción "y", se denominan *conjuntivas*. Ese nombre se emplea, actualmente, de ma-

nera universal en todos los tratados de lógica. No debe creerse que por el hecho de llamarse *conjuntivas* sean las únicas que emplean conjunciones para unir sus proposiciones componentes. El nombre de "conjuntivas" se debe a razones estrictamente lógicas que estudiaremos en el próximo capítulo¹. Pero todos los tipos de proposiciones compuestas, se denominen o no "conjuntivas", emplean siempre conjunciones para unir sus proposiciones componentes.

Las proposiciones conjuntivas, disyuntivas e impli-cativas se denominan proposiciones compuestas elementales, porque sirven a su vez, como veremos pronto, para componer proposiciones más complicadas, o sea, sirven como elementos o puntos de partida para elaborar nuevas combinaciones de proposiciones.

Las proposiciones conjuntivas son, de acuerdo con lo dicho, todas aquellas de la forma:

"Lima es la capital del Perú y París es la capital de Francia".

análisis de la
proposición
conjuntiva

"Tres es un número impar y cuatro es un número par".

"Los hombres son racionales y los animales son irracionales", etc., etc.

Lo fundamental de la proposición conjuntiva es que tiene dos partes, cada una de las cuales es, a su vez, una proposición, y estas partes están unidas por medio de la conjunción "y". Es importante observar que las proposiciones componentes *pueden ser de cualquier naturaleza o tipo*. Lo único que interesa saber, para comprobar si una proposición compuesta es o no conjuntiva,

¹ Algunos lógicos, para evitar confusiones, han propuesto llamar a las proposiciones compuestas por medio de la conjunción "y" proposiciones adjuntivas. Pero esta denominación no se ha generalizado.

es si sus proposiciones componentes están o no unidas por la conjunción "y".

Los siguientes ejemplos nos dan una idea clara de lo que son las proposiciones disyuntivas:

"Roberto es abogado o Roberto es médico".

"La raíz cuadrada de cuatro es un número positivo o la raíz cuadrada de cuatro es un número negativo".

"Estocolmo es una ciudad alegre o Jorge mintió a Manuel".

La primera proposición disyuntiva une dos proposiciones predicativas. En el estilo sintético del lenguaje corriente, se diría: "Roberto es abogado o médico".

La segunda también une dos proposiciones predicativas, y su forma sintética es:

"La raíz cuadrada de cuatro es un número positivo o negativo".

La tercera proposición une una proposición predicativa y una relacional, y no puede sintetizarse. El que afirma la proposición da a entender que Jorge dijo a Manuel que Estocolmo es una ciudad alegre y que, en caso de no ser alegre, Jorge mintió deliberadamente.

Los ejemplos anteriores, tanto de proposiciones conjuntivas como disyuntivas, permiten ver la enorme frecuencia con que se emplean las proposiciones compuestas en el lenguaje corriente, en el lenguaje conversacional de todos los días. Estas proposiciones permiten comprender la inmensa importancia que tienen las conjunciones y las proposiciones coligativas formadas mediante su empleo para la constitución del lenguaje.

Las proposiciones implicativas, condicionales o hipotéticas son también de extraordinaria importancia. No sólo se emplean con gran frecuencia en el lenguaje

de todos los días, sino también en el lenguaje científico. Todas las leyes científicas, tanto de la física como de las demás ciencias, y los teoremas de las matemáticas se enuncian mediante este tipo de proposiciones:

“Si mañana hay nubes, entonces mañana lloverá”.

“Si vienes por mí a las seis, entonces iremos al cinema”.

“Si se calienta un cuerpo, entonces dicho cuerpo se dilata”.

“Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de sus catetos”.

Las dos primeras proposiciones son tomadas del lenguaje común. Casi siempre se expresan en forma elíptica:

“Si mañana hay nubes, lloverá”.

“Si vienes por mí a las seis, iremos al cinema”.

La tercera proposición es una ley física muy conocida: el calor dilata los cuerpos. Cuando dos personas conversan entre sí, al referirse a las leyes científicas, casi siempre lo hacen por medio de proposiciones simples, que no son implicativas.

Pero esto sucede porque no están pensando de manera rigurosa o científica. Cuando quieren hablar con precisión, deben dar forma hipotética a su expresión. Sobre esto regresaremos, porque es de gran importancia: toda ley científica se expresa siempre por medio de proposiciones implicativas o hipotéticas. Lo mismo ocurre con los teoremas, pues los teoremas no son otra cosa que leyes matemáticas. El teorema de Pitágoras se enuncia casi siempre presuponiendo que se refiere a un triángulo rectángulo, pero sin mencionarlo explícitamente. De otra manera el teorema no tiene sentido, porque sólo los

triángulos rectángulos tienen catetos o hipotenusas. Por eso, cuando se desea expresar de manera rigurosa o científica, se expresa la condición de que el triángulo sea rectángulo.

relaciones entre la proposición implicativa y la deducción

Pero la importancia de las proposiciones implicativas, hipotéticas o condicionales no queda aquí. Es casi seguro que el lector habrá observado que los ejemplos de deducción que hemos analizado en los capítulos anteriores, tienen forma de proposición implicativa. Así:

“Si todos los hombres son mortales, entonces algunos hombres son mortales”.

“Si cuatro es mayor que tres, entonces tres es menor que cuatro”.

son proposiciones implicativas. Y los ejemplos más complicados de silogismo, como “Si todos los griegos son hombres y todos los hombres son mortales, entonces todos los griegos son mortales”.

también son implicativos. El silogismo es una proposición implicativa, en la cual la primera proposición componente es, a su vez, una proposición compuesta, de forma conjuntiva y la segunda proposición es simple. Se caracteriza, además, porque todas las proposiciones simples que lo integran, son siempre predicativas.

Pueden darse ejemplos de inferencia mucho más complicados que los presentes. Pueden éstos tener muchas formas, muchas variaciones, pero su estructura fundamental es siempre implicativa. *Toda inferencia, toda deducción, sea cual sea, puede expresarse siempre por medio de una proposición implicativa.*

§ 19. *Las propiedades intrínsecas de las proposiciones.* Las proposiciones tienen ciertas propiedades generales. Estas propiedades son tres: la *cualidad*, la *modalidad* y la *cantidad*. Sea cual sea la proposición que

se considere, sea cual sea su tipo o especie, lebe tener siempre cualidad, modalidad y cantidad.

La *cualidad* de las proposiciones consiste en la propiedad que tienen de ser *afirmativas* o *negativas*. La palabra *cualidad*, como en el caso de la palabra *conjuntiva*, se emplea en lógica en sentido especial, que difiere del general. En general el término *cualidad* significa propiedad, característica. Así, las palabras "grande", "pequeño", "azul", "verde", "redondo", "cuadrado", etc., denotan cualidades o propiedades. Pero en lógica, la tradición ha impuesto que cuando se habla de la cualidad de las proposiciones se indique la propiedad que tienen de ser afirmativas o negativas.

la cualidad
de las pro-
posiciones

Toda proposición tiene que ser afirmativa o negativa. Si una expresión no afirma o niega algo, no puede ser proposición. Esto lo vimos ya de manera precisa en el primer capítulo. Una expresión que no afirma o niega, puede ser una interrogación, una orden, un ruego, o cualquier otra cosa, pero no será de ninguna manera una proposición.

Así como toda proposición es afirmativa o negativa, así también toda proposición se refiere a una situación de hecho, a una situación necesaria o a una situación probable. Por ejemplo, la proposición

la modalidad
de las pro-
posiciones

"Juan es abogado"

es una proposición que se refiere a una situación que existe, se refiere al hecho de que Juan sea abogado. Es cierto que Juan es abogado, existe un hombre que se llama Juan, y este hombre es abogado. La proposición "Juan es abogado" describe este hecho, se limita a referir la situación de Juan en relación a su profesión, nos ilustra sobre algo que realmente sucede.

Pero la proposición

"dos más tres es necesariamente igual a cinco".

no se limita a describir una situación de hecho, sino que se refiere a que dicho hecho existe necesariamente, que no puede no haber existido, que no puede ser de otra manera. En este sentido, la segunda proposición es muy diferente de la primera. La proposición "Juan es abogado" nos describe un hecho, pero no nos dice que ese hecho es necesario. Juan es, en efecto, abogado, pero pudo haber sido médico. No es una necesidad inevitable que Juan haya sido abogado. En cambio, es absolutamente necesario que dos más tres sea igual a cinco. Es imposible que dos más tres sea, por ejemplo, igual

Las proposiciones que se limitan a enunciar hechos, a describir situaciones sin decir nada sobre su necesidad, se denominan *asertóricas*, porque son meras aserciones, meros enunciados. Las proposiciones que afirman que la situación que describen es necesaria se denominan *apodícticas*, de la palabra griega *apódeixis*, que significa prueba o demostración lógica, o sea inferencia. Los griegos hicieron la observación fundamental de que todas las inferencias se expresan por medio de proposiciones compuestas, que son necesariamente verdaderas. Así, la inferencia:

"Si cuatro es mayor que tres, entonces tres es menor que cuatro".

es una proposición compuesta, de tipo implicativo y además *apodíctica*, es decir, que expresa una necesidad, que es necesariamente verdadera. Porque es indiscutible que si cuatro es mayor que tres, tres tiene que ser, de todas maneras, de modo absolutamente inevitable, menor que cuatro.

Además de poder ser *asertórica* o *apodíctica*, una proposición puede ser *problemática*, cuando se refiere a la posibilidad de una situación.

posiciones
asertóricas y
apodícticas

posiciones
problemáticas

“Es posible que mañana llueva”.

“Pedro podría ser abogado”

“El caballo Arlequín tiene chance de ganar el clásico”

“La Alianza tiene grandes probabilidades de ganar a la “U”.

son proposiciones problemáticas. Las proposiciones problemáticas son lo contrario de las apodícticas. Las apodícticas afirman la necesidad de que algo sea de tal o cual manera, de que una situación exista de todas maneras, en cambio las proposiciones problemáticas se refieren exclusivamente a la posibilidad de que algo sea de tal o cual manera y, en consecuencia, dejan abierta la posibilidad de que no esa así, sino de otro modo.

En lógica las proposiciones problemáticas tienen también una enorme importancia, una importancia tan grande que su estudio forma un capítulo especial de la lógica, que se denomina *lógica inductiva*. Más adelante volveremos a tocar este punto.

importancia de las proposiciones problemáticas para la lógica

En relación a la cantidad, las proposiciones pueden ser de tres tipos: *individuales*, *particulares* y *universales*.

la cantidad de las proposiciones

Las proposiciones individuales son aquellas que atribuyen una propiedad a un individuo, a un objeto único, diferente de todos los demás, o son aquellas que relacionan individuos entre sí. *Para que una proposición sea individual, todos sus sujetos deben ser términos que se refieran a un solo individuo o un solo objeto.*

proposiciones individuales

“Sócrates es mortal”

“Napoleón nació en Córcega”

“Buenos Aires es la capital de Argentina”

“Juan es mayor que Pedro”

son proposiciones individuales.

posiciones
particulares

Las proposiciones particulares se refieren a varios individuos.

Las siguientes son proposiciones particulares:

“Algunos hombres son mortales”

“Algunos números son pares”

“Ciertos libros son interesantes”

“Ciertas biografías son más interesantes que las novelas”

“Unos hombres estaban a la derecha de la carretera”.

En toda proposición particular se incluyen términos como “algunos”, “ciertos”, “unos”, “muchos”, etc., es decir, adjetivos que indican que de la extensión o clase de los sujetos se han seleccionado *varios* individuos para atribuirles cierta propiedad o para relacionarlos de alguna manera.

Las proposiciones:

“Todos los hombres son mortales”

“Todos los números pares son divisibles por dos”

“Todos los ingleses son trabajadores”

“Todas las potencias son mayores que sus bases”

posiciones
universales

son proposiciones universales. Las tres primeras son predicativas, y la cuarta es relacional. Lo esencial en la proposición universal es que el sujeto se refiere a la totalidad de su clase o extensión. Así, en la proposición “Todos los hombres son mortales”, el término “hombre”, que es el sujeto, no se refiere a un solo hombre o a unos cuantos hombres, sino a todos los hombres habidos y por haber. Por eso decimos que se refiere a

toda su extensión o a toda su clase, porque, como hemos visto al estudiar los términos, cada término tiene una extensión o clase (o conjunto) que es la totalidad de objetos que designa, la totalidad de objetos a los cuales se refiere. La palabra "hombre", considerada de manera aislada, menciona a todos los objetos que son hombres, es decir, a todos los hombres. La totalidad de estos objetos, el conjunto de estos objetos, es su extensión o clase. En la proposición "Todos los hombres son mortales", el sujeto "hombre" menciona o indica a todos los hombres. Y para eso en la proposición se emplea el término "todos", para hacer ver que se hace referencia a toda la extensión del término "hombre".

Es importante recordar que, al comienzo del presente párrafo, dijimos que todas las proposiciones poseían las propiedades de cualidad, modalidad y cantidad. Y por eso, en relación a los ejemplos considerados, es conveniente descubrir de qué manera se relacionan estas tres propiedades. Por ejemplo, la proposición "Un alemán es campeón de cien metros" es afirmativa, asertórica e individual. Es afirmativa porque enuncia que alguien tiene cierta propiedad (ser campeón); es asertórica porque describe un hecho sin afirmar que este hecho es necesario, lo que es natural, pues el campeón de cien metros, en lugar de ser alemán, podría ser americano a finlandés o de cualquier otra nacionalidad, y es individual porque se refiere a un solo individuo.

Pero así como la proposición analizada es afirmativa, asertórica e individual, puede darse otra proposición que se caracterice por reunir propiedades diferentes. Por ejemplo:

"Ningún inglés es nervioso"

es una proposición negativa, asertórica y universal. Es

negativa porque niega que los ingleses tengan el carácter de nerviosos, enuncia que no existe la situación o el hecho de que los ingleses sean nerviosos. Es asertórica porque se limita a describir una situación, no enuncia que esta situación negativa exista necesariamente (en realidad se trata de una proposición falsa, pues es evidente que hay ingleses nerviosos) y es universal porque el término "ningún" hace que el sujeto "inglés" se refiera a toda su extensión o clase. La proposición niega la condición de ser nervioso a todos los individuos que pertenecen a la clase o extensión del término "inglés".

Como cada una de las tres propiedades intrínsecas de las proposiciones, tiene varias alternativas, las combinaciones entre ellas son muy numerosas. La cualidad afirmativa puede combinarse con cualquier modalidad y cualquier cantidad, y asimismo la cualidad negativa. La modalidad problemática puede combinarse con cualquier cualidad y con cualquier cantidad, la cantidad universal puede combinarse con cualquier cualidad y con cualquier modalidad, etc. A continuación, damos ejemplos de proposiciones diversas y dejamos como ejercicio la determinación de su cualidad, su modalidad y su cantidad.

"Todos los hombres son mortales"

"Ningún hombre es inmortal"

"Otto no es inteligente"

"El número cuarenta es necesariamente divisible por dos"

"No es posible que Hitler siga viviendo"

"Algunos alemanes son divertidos"

"Ciertas mujeres son muy intuitivas"

“Einstein es posiblemente el hombre más genial de nuestro siglo”

“Probablemente el piloto no pudo saltar a tiempo”

“Todos los números enteros están compuestos por potencias de números primos”

“Es imposible dividir los números primos por dos”

“El hombre es un ser mortal”

“No es falso afirmar que Zebedeo es el alumno más inteligente de la clase”.

CUADRO DE LAS PROPOSICIONES

Clases de proposiciones:	{	Simples	{	Predicativas
				Relacionales
Propiedades intrínsecas de las proposiciones	{	Compuestas o coligativas	{	Conjuntivas
				Disyuntivas
	{	Cualidad:	{	afirmativas
				negativas
		Modalidad:	{	apodícticas
				asertóricas
	{	Cantidad:	{	problemáticas
				individuales
				particulares
				universales.

Ejercicios

- 1) Decir, por medio del análisis, si las siguientes proposiciones son simples o compuestas.
 - a) Sócrates es un filósofo griego.
 - b) Sócrates fue maestro de Platón.
 - c) Platón fue maestro de Aristóteles y de Alcibiades.
 - d) Si estudias pasarán en el examen.
 - e) De la verdad de "Todos los hombres son mortales" se deriva la verdad de "Algunos hombres son mortales".
 - f) Esta piedra parece de pirita o de oro.
 - g) La proposición " $2 + 2 = 4$ ", es verdadera (¡ojo!). Se recomienda al lector pensar cuidadosamente antes de dar la respuesta).

- 2) Decir si las siguientes proposiciones son predicativas o relacionales.
 - a) Todos los hombres son racionales.
 - b) Los delfines son más inteligentes que los monos.
 - c) $a + b = c$.
 - d) María está muy bien peinada.
 - e) María se peina muy bien (¡ojo! ¡pensar un poco!).
 - g) Los delfines son los animales más inteligentes del mundo (¡pensar con cuidado!).

- 3) Decir qué cualidad, qué modalidad y qué cantidad tienen las siguientes proposiciones:
 - a) Todos los hombres son mortales.
 - b) Ningún número impar es divisible por dos.
 - c) Alejandro conquistó parte de la India.
 - d) El hombre es asediado por todas las pasiones.

- e) El número dos divide a todos los números pares.
- 1) El número dos puede dividir a todos los números pares.
- g) Si Bolognesi es peruano, necesariamente es americano.
- h) Ningún número impar puede ser dividido por dos.
- i) Hay por lo menos un alumno de nuestra clase que es estudioso (¡pensar cuidadosamente!).
- j) Es falso que haya por lo menos un peruano que no sea patriota (¡pensar cuidadosamente!).

Capítulo V

LA INFERENCIA COLIGATIVA: CONSIDERACIONES PRELIMINARES

§ 20. *La propiedad fundamental de las proposiciones coligativas.*

Como hemos visto, toda proposición coligativa es una proposición compuesta de dos proposiciones unidas por medio de una conjunción gramatical. Y basta hacer una observación muy ligera para comprobar que de la verdad de las proposiciones componentes se puede pasar a la verdad de la proposición compuesta. Lo único que hay que dejar bien establecido es el sentido preciso en que se usa la conjunción gramatical que une las dos proposiciones componentes. Como sabemos, hay tres clases principales de proposiciones coligativas: conjuntiva, disyuntiva e implicativa (hipotética). Consideremos un ejemplo, la proposición conjuntiva:

“Homero escribió la *Iliada* y Sófocles escribió *Edipo*”

esta proposición tiene un sentido preciso: afirma la verdad de sus proposiciones componentes. Cuando estudiamos los términos estructurales, vimos cómo la conjunción “y” se emplea siempre para unir dos proposiciones, afirmando que las dos son verdaderas. Este es su sentido preciso. Cuando se trata de proposiciones, la conjunción “y” se emplea *única y exclusivamente* para afirmar que las dos proposiciones que une son ambas verdaderas. Y este sentido permite establecer una relación muy simple:

si las dos proposiciones que une la proposición conjuntiva son verdaderas, entonces la proposición conjuntiva es necesariamente verdadera. Así, en nuestro ejemplo, es evidente que la proposición conjuntiva:

“Homero escribió la Iliada y Sófocles escribió Edipo”

es una proposición verdadera, porque sus dos proposiciones componentes son verdaderas. La verdad de sus dos proposiciones componentes, permite afirmar la verdad de dicha proposición compuesta. En cambio, la proposición conjuntiva:

“Homero escribió la Iliada y Cervantes escribió la Odisea”

es, evidentemente falsa, porque una de sus proposiciones componentes es falsa. Como la proposición conjuntiva afirma la verdad de sus dos proposiciones componentes, es evidente que si una de ellas es falsa, la proposición compuesta debe ser falsa, porque, en este caso, lo que afirma (a saber que las dos componentes son verdaderas) no coincide con los hechos (a saber que una de las componentes es falsa). Si las dos componentes son falsas, con mayor razón la proposición conjuntiva será falsa. Vemos así, cómo de manera muy simple e intuitiva se puede establecer una relación entre las dos proposiciones que integran la proposición conjuntiva y la misma proposición conjuntiva. Si las dos proposiciones que la integran son verdaderas, la proposición conjuntiva es verdadera, en todos los demás casos es falsa.

§ 21. *Primeras prácticas de formalización - El concepto de variable.* Las mismas consideraciones que hemos hecho en relación a las proposiciones conjuntivas

se pueden hacer en relación a las proposiciones disyuntivas e implicativas. Pero todo ello sería muy largo si se hiciera por medio del lenguaje común. Apenas entramos al campo de la lógica y comenzamos a preparar el terreno para el estudio de la inferencia, las cosas comienzan a complicarse y, en consecuencia, a alargarse. Por eso ha llegado ya el momento de formalizar un poco nuestro lenguaje para hacerlo más sintético y más claro. Pronto veremos que las inferencias coligativas, aunque muy simples en principio, pueden combinarse de manera extraordinariamente fecunda. Las proposiciones conjuntivas, disyuntivas e implicativas pueden combinarse entre sí de la manera más ágil y, a veces, inesperada, con la consecuencia de que pueden realizarse inferencias largas y sutiles. Pero la cantidad de combinaciones exige el empleo de un lenguaje muy riguroso si se quiere evitar la oscuridad, la vaguedad y el aspecto farragoso que adquiere todo proceso largo de inferencia cuando se desarrolla por medio del lenguaje común.

el estudio de la inferencia coligativa exige el empleo del lenguaje formalizado

Lo primero que debe hacerse cuando se formaliza un lenguaje es crear símbolos especiales para sus términos. Nuestro primer paso es por eso señalar símbolos para la conjunción, para la disyunción y para la implicación. La conjunción será simbolizada con el símbolo " $\wedge$ ", la disyunción con el símbolo " $\vee$ " y la implicación con el símbolo " $\rightarrow$ ".

Con esta primera formalización, las proposiciones coligativas adquieren la siguiente forma:

Proposición conjuntiva:

"La Biblia es el libro de los cristianos $\wedge$ el Corán es el libro de los mahometanos".

Proposición disyuntiva:

"La raíz cuadrada de cuatro es dos $\vee$ la raíz cuadrada de cuatro es menos dos".

Proposición implicativa, hipotética o condicional:

"César no hubiera cruzado el Rubicón $\rightarrow$ César no habría conquistado las Galias".

Los símbolos lógicos " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\rightarrow$ " han reemplazado a las palabras comunes "y", "o", "si... entonces...". De ahora en adelante, cada vez que los encontremos sabremos ya lo que significan: significan exactamente lo mismo que dichas palabras.

el empleo del
pronombre
como una ne-
cesidad de la
formalización

Pero a pesar de que con nuestros nuevos símbolos hemos ganado en precisión y concisión no hemos ganado mucho todavía. En efecto, cada vez que queremos referirnos a las proposiciones coligativas tenemos que dar ejemplos concretos, tenemos que referirnos a determinadas proposiciones conjuntivas, disyuntivas o implicativas. Pero si queremos estudiar las propiedades de estas proposiciones en relación a la inferencia, si queremos llegar a conocimientos generales en relación a la totalidad de las proposiciones de este tipo, debemos disponer de un método que haga posible abarcar todo el campo de las proposiciones coligativas sin necesidad de estudiar los casos uno por uno. Esto es posible gracias al empleo de las variables. Por eso, cada vez que nos refiramos a una proposición, en lugar de expresarla tal como es, haremos uso de una variable. De esta manera nos referiremos a ella, sin que sea necesario presentarla en cada caso con toda su estructura. Las variables que se emplean en lógica para hacer referencia a las proposiciones son las letras de la segunda mitad del alfabeto: "p", "q", "r", "s", "t", etc.

Estas letras son variables proposicionales, es decir, se emplean para designar cualquier proposición que se desee, sin necesidad de nombrarla, de expresarla con todas sus palabras y partes constitutivas.

Las variables proposicionales pueden compararse con las variables numéricas empleadas en el álgebra y

otras ramas de las matemáticas. Todos nosotros, al estudiar el álgebra, hemos empleado variables. Por ejemplo, las expresiones:

$$y = x, \quad 2x^2 + 3, \quad y < x,$$

son expresiones que tienen las variables "x" e "y". Las variables empleadas en matemáticas significan números, representan cualquier número. Debido a que las variables representan cualquier número, las expresiones matemáticas poseen una gran generalidad porque se refieren a la totalidad de los números. Así, uno de los principios más importantes del álgebra es el siguiente:

$$x + y = y + x$$

Este principio quiere decir que el orden de los sumandos no altera la suma. Pero los sumandos en esta expresión están representados por variables. Por eso la igualdad no se refiere a tal o cual número, sino a todos los números habidos y por haber. Y por eso, también, en lugar de "x" y de "y", puede ponerse cualquier número. O sea que en las expresiones que usan variables, puede ponerse en lugar de las variables, los objetos que éstas representan. Tenemos entonces que, si es verdad que

$$x + y = y + x$$

es también verdad que:

$$3 + 4 = 4 + 3$$

$$\frac{1}{2} + 2 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$1 + 2 = 2 + 1$$

.....

.. etc.

Hay también otro principio fundamental del álgebra: el orden de los factores no altera el producto. Si tuviéramos que enunciar este principio para cada par de factores, nunca terminaríamos, porque los números son infinitos. Pero si empleamos variables, se puede expresar el principio para cualquier par de factores, poniendo:

$$x y = y x$$

Las variables proposicionales desempeñan en lógica exactamente la misma función que las variables numéricas en matemáticas. Así como en las expresiones:

$$x + y = y + x$$

$$y x = x y$$

puede ponerse cualquier número en lugar de "x" y de "y", así en las expresiones:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \rightarrow q$$

puede ponerse cualquier proposición en lugar de "p" y de "q".

Y ahora podemos ya formalizar por completo nuestro lenguaje cuando nos refiramos a las proposiciones coligativas. Cada vez que nos refiramos a las proposiciones conjuntivas pondremos:

$$p \wedge q$$

cada vez que nos refiramos a las proposiciones disyuntivas, pondremos

$$p \vee q$$

y cada vez que nos refiramos a las proposiciones implicativas pondremos:

$$p \rightarrow q$$

Como las letras "p" y "q" son variables lógicas, es decir, variables proposicionales, designan a cualquier proposición, sin excepción de ninguna clase. De suerte que las expresiones anteriores sirven para referirse a cualquier proposición conjuntiva, a cualquier proposición disyuntiva y a cualquier proposición implicativa. De manera sencilla y rápida, mediante el empleo de variables, hemos formalizado nuestro lenguaje y podemos referirnos ahora con toda comodidad, de una manera increíblemente simple y precisa, a las proposiciones coligativas.

utilidad de las variables para el estudio de la inferencia

§ 22. *Los esquemas fundamentales.* Y ahora tenemos ya el instrumento necesario para seguir investigando la propiedad fundamental de las proposiciones coligativas: la existencia de una relación entre la verdad de las proposiciones componentes y la verdad de la proposición compuesta. Ya hemos determinado esta relación en el caso de la proposición conjuntiva.

Consideremos ahora la proposición disyuntiva " $p \vee q$ ".

Con respecto a la verdad de sus proposiciones componentes, *una disyunción siempre afirma que por lo menos una de ellas es verdadera.*

la proposición disyuntiva y la inferencia

Ahora bien, es evidente que tratándose de una proposición disyuntiva, como dicha proposición afirma que por lo menos una de sus componentes es verdadera, bastará que una de ellas lo sea para que la proposición compuesta sea verdadera. Pero si las dos componentes son verdaderas, con mayor razón, la proposición disyuntiva

será también verdadera. En consecuencia, sólo podrá ser falsa cuando las dos componentes sean falsas.

Así la proposición:

“La raíz cuadrada de cuatro es dos o la raíz cuadrada de cuatro es menos dos”, será verdadera porque sus dos componentes son verdaderas, ya que menos dos también es raíz cuadrada de cuatro, porque $-2 \times -2 = 4$.

La proposición:

“Dos es un número par o dos es un número impar”, será también verdadera porque la primera proposición es verdadera.

La proposición:

“Tres es un número par o tres es un número impar” será también verdadera, porque la segunda proposición es verdadera. Pero la proposición:

“Tres es la raíz cuadrada de cuatro o uno es la raíz cuadrada de cuatro” será falsa, porque las dos proposiciones componentes son falsas.

La relación entre la verdad y falsedad de las proposiciones componentes y la verdad y falsedad de las proposiciones compuestas es, en los dos casos analizados (la conjunción y la disyunción), tan precisa que puede expresarse por medio de una tabla. Esta tabla se denomina también esquema y es como una cruz con el brazo derecho más largo que el izquierdo:

La parte de la izquierda se denomina *el margen* y la parte de la derecha se denomina *el cuerpo*. En la parte superior del margen se colocan todas las variables que intervienen en la expresión coligativa, y en la parte superior del cuerpo se coloca la proposición compuesta. Por ejemplo, si se trata de la proposición conjuntiva, se tendrá:

p	q	$p \wedge q$
---	---	--------------

Debajo de las variables, en la parte inferior del margen, se colocan todas las combinaciones posibles entre la verdad y la falsedad de las proposiciones componentes. La verdad y la falsedad de las proposiciones se simbolizan por las letras V y F respectivamente. La letra V significa una sola cosa: proposición verdadera, y la letra F significa una sola cosa: proposición falsa. Tratándose de dos proposiciones sólo pueden haber cuatro combinaciones o arreglos: o bien las dos son verdaderas, o la primera es verdadera y la segunda falsa, o la primera es falsa y la segunda verdadera, o bien las dos son falsas. Todas estas combinaciones se colocan en la parte inferior del margen, debajo de las variables:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Obsérvese que los símbolos de la verdad y de la falsedad quedan en dos columnas, exactamente debajo de cada una de las variables. La columna que queda debajo

de "p" caracteriza la verdad y la falsedad de "p" y la que queda debajo de "q" caracteriza la verdad y la falsedad de "q".

Una vez que se ha hecho esto, se colocan debajo de la proposición compuesta, en la parte inferior del cuerpo, y exactamente debajo del símbolo de unión, las V y las F que están determinadas por las V y las F de las proposiciones componentes. Tenemos, así:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Lo importante de este esquema es la relación rigurosa que existe entre las V y las F de las variables y las de la proposición compuesta. Sabemos ya que una proposición conjuntiva sólo puede ser verdadera cuando sus dos proposiciones componentes son verdaderas. En todos los demás casos será falsa. Y esto es precisamente lo que se expresa por medio del esquema. En él se ve con absoluta precisión como cuando "p" es verdadera, es decir, cuando debajo de ella aparece el símbolo V, y cuando "q" también es verdadera, es decir, aparece también debajo de ella el mismo símbolo, la proposición conjuntiva " $p \wedge q$ " también es verdadera y por eso se pone debajo de ella el símbolo V. En cambio basta que aparezca debajo de cualquiera de las variables el símbolo F, es decir, basta que una de las proposiciones componentes sea falsa, para que también sea falsa la proposición compuesta y por eso se pone debajo de ella el símbolo F.

Una vez explicado el esquema de la conjunción, es muy fácil comprender el esquema de la disyunción:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se observa de inmediato que la disyunción es verdadera en todos los casos menos cuando las dos componentes, "p" y "q" son falsas. Puede decirse que la conjunción y la disyunción son funciones inversas. La conjunción tiene una V y tres F, la disyunción tiene tres V y una F; basta que una proposición sea falsa para que la conjunción sea falsa, en cambio basta que una proposición sea verdadera para que la disyunción sea verdadera.

Asimismo, el esquema de la implicación se deriva del sentido mismo de la expresión implicativa.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si la proposición implicativa consiste en afirmar que si el antecedente es verdadero, el consecuente también es verdadero, es evidente que una implicación sólo puede ser falsa en el caso en que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, porque sólo en este caso, lo que dice la proposición estará en desacuerdo

con los hechos. En todos los demás casos, la implicación será verdadera, como se indica en el esquema.

Ejercicios

- 1) Decir qué clase de variables son los símbolos que integran las siguientes expresiones:
 - a) La proposición p es verdadera.
 - b) $x + y = z$.
 - c) Si p es verdadera entonces q también es verdadera.
 - d) p, q, r, s, t son proposiciones simples.
 - e) Si tenemos x variables p , y z variables q , entonces, tendremos $x + x$ variables.
 - f) S es brontosaurio (¡pensar un poco!).
 - g) S es P (¡idem!).
- 2) Formalizar por medio de variables proposicionales y de los símbolos lógicos de coligación, las siguientes expresiones:
 - a) Marcelo conquistó Siracusa y Arquímedes defendió Siracusa.
 - b) Todos los divisores de 15 son impares y David fue rey de Israel.
 - c) La ostra es un molusco o Napoleón estuvo prisionero en Santa Helena.
 - d) Si a y b son catetos de un triángulo rectángulo, y c es su hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.
 - e) Si Jorge o María vienen mañana, entonces, los llevaremos al teatro.
 - f) Si Juan o Manuel son tus amigos, María y Esther son tus enemigas (¡pensar un poco!).
 - g) Si Ruth es hermana de Esther, entonces Esther es hermana de Ruth.

Capítulo VI

LA INFERENCIA COLIGATIVA: EL METODO DE LOS ESQUEMAS

§ 23. *El método de los esquemas.* Si lo único que pudiera hacerse en relación a las tres proposiciones coligativas elementales que conocemos, la conjunción, la disyunción y la implicación, fuera la determinación de sus esquemas, no valdría la pena haberse dado el trabajo.

Mas si se observa que las tres proposiciones coligativas conocidas pueden combinarse entre sí de innumerables maneras diferentes, se abren ante nosotros nuevas posibilidades.

Supongamos que hemos enunciado una proposición conjuntiva y una proposición disyuntiva, " $p \wedge q$ " y " $p \vee q$ " respectivamente. Es perfectamente posible unir las combinaciones de las proposiciones coligativas y el estudio de la inferencia mediante la implicación:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

Pero también podemos unir las combinaciones mediante la conjunción o la disyunción:

$$(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

En general podemos unir cualquier proposición coligativa con cualquier otra mediante un símbolo de coligación. Esto sucede con gran frecuencia en el lenguaje corriente, sólo que, como hemos hecho notar tantas veces, de manera sintética y elíptica. Por ejemplo:

“Si mañana vienen Armando y Teresa, podremos salir en la lancha”.

Esta proposición lógicamente analizada equivale a la siguiente:

“Si mañana viene Armando y mañana viene Teresa, entonces podremos salir en la lancha”.

Aquí hay tres proposiciones diferentes: “mañana viene Armando”, que simbolizamos por “p”, “mañana viene Teresa”, que simbolizamos por “q” y “podremos salir en la lancha”, que simbolizamos por “r”.¹ La formalización de nuestra proposición será:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Los paréntesis se ponen para indicar que toda la conjunción funciona como antecedente o implicante. Mediante el uso de los paréntesis es posible combinar cualquier número de proposiciones coligativas. Por ejemplo:

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

$$[(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \rightarrow (r \vee t)$$

¹ Sobre el empleo de las variables hemos hablado en el capítulo anterior.

utilidad de
los paréntesis
para combi-
nar las ex-
presiones
coligativas

En la segunda expresión hemos colocado dobles paréntesis para indicar que la conjunción de la conjunción con la disyunción funciona como implicante. El paréntesis aplicado a " $r \setminus / t$ " indica que es el único consecuente.

El empleo de los paréntesis es muy útil, pues si no se emplean paréntesis pueden presentarse confusiones. Por ejemplo, la expresión:

$$p \setminus q \rightarrow r$$

puede ser

$$(p \setminus q) \rightarrow r, \text{ o}$$

$$p \setminus (q \rightarrow r)$$

que significan cosas muy diferentes. Pero los paréntesis tienen el defecto que cuando la expresión es muy larga y complicada, se acumulan y se hace muy trabajoso leerlos adecuadamente. Por eso los lógicos han inventado un método equivalente, pero mucho más fácil de manejar, por lo que tiene hoy día universal vigencia. En lugar de paréntesis se emplean puntos. Pero los puntos no se colocan como los paréntesis sino al lado de los símbolos que indican los diversos tipos de coligación. Así, en lugar de:

$$(p \setminus q) \rightarrow (p \setminus q), \text{ se pondrá}$$

$$p \setminus q. \rightarrow .p \setminus q$$

El hecho de que el símbolo de la implicación tenga dos puntos, indica que es el símbolo principal y que todo

lo que esté a su izquierda debe ser considerado como un antecedente y todo lo que esté a su derecha debe ser considerado como un consecuente. Asimismo, en lugar de la expresión:

$$[(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \rightarrow (r \vee t)$$

pondremos:

$$p \wedge q . \wedge . p \vee q : \rightarrow : r \vee t$$

En la primera expresión los paréntesis indican que la conjunción es la implicante y la disyunción la implicada. En la segunda expresión, se han suprimido los dobles paréntesis. Pero en cambio la puntuación ha aumentado. Como el símbolo de la implicación es el más importante, se ha colocado entre dos pares de puntos. Todo lo que queda a su izquierda funciona como implicante y todo lo que queda a su derecha funciona como implicada. Pero la implicante es, a su vez, una proposición compuesta, puesto que es una conjunción entre una conjunción y una disyunción. Por eso se ha puesto un punto a cada lado del segundo símbolo de la conjunción para indicar que la conjunción de la izquierda y la disyunción de la derecha son sus proposiciones componentes. La puntuación tiene reglas muy simples. El símbolo coligativo encuadrado por el mayor número de puntos es el más importante y el que determina la naturaleza global de la expresión. Una vez que se determina el símbolo con mayor número de puntos, la expresión queda separada en una parte izquierda y una parte derecha. En relación a ambas partes se vuelve a proceder exactamente de la misma manera. Se busca cuál es el símbolo que tiene mayor número de

puntos y este símbolo es el que determina la naturaleza coligativa de la proposición parcial y así sucesivamente hasta llegar a los símbolos de coligación, que no tienen puntos. Entonces ya no se puede ir más adelante y se ha llegado al término del análisis. Veamos un ejemplo:

análisis de
una expresión
complicada

$$p \wedge q \wedge q \wedge r : r \wedge s : \rightarrow : p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$$

El símbolo que tiene mayor número de puntos es una implicación. Sabemos así que se trata de una proposición compuesta implicativa, con un antecedente y un consecuente bastante complicados. Podemos poner, para ayudar al análisis:

$$\begin{array}{cc} \text{A n t e c e d e n t e} & \text{C o n s e c u e n t e} \\ \hline p \wedge q \wedge q \wedge r : r \wedge s : \rightarrow : p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s \end{array}$$

En el antecedente el símbolo con mayor número de puntos es una conjunción. Se trata entonces de una proposición compuesta conjuntiva de dos componentes. La componente de la derecha no tiene puntos, y no es necesario ir más lejos. Tenemos así:

$$\begin{array}{cc} \text{A n t e c e d e n t e} & \text{C o n s e c u e n t e} \\ \hline \hline p \wedge q \wedge q \wedge r : r \wedge s : \rightarrow : p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s \end{array}$$

Pero la componente de la izquierda tiene una conjunción con un punto a cada lado. Por lo tanto debe

tener dos componentes que a su vez son compuestas. El análisis nos lleva al siguiente paso:



Si aplicamos la misma técnica de análisis a la implicada, vemos que el símbolo con mayor número de puntos es una conjunción. Se trata así de una conjunción cuyas dos componentes son implicaciones. Las llaves nos indican ahora todas las proposiciones componentes que entran sucesivamente en el antecedente y el consecuente de la proposición compuesta total que es una proposición implicativa.



Lo importante para nuestro fin, que es el estudio de la inferencia o deducción es que, así como existe una relación entre la verdad y la falsedad de las proposiciones componentes y de la proposición compuesta en el caso de la conjunción, de la disyunción y de la implicación, así también existe esa misma relación en el caso de las proposiciones más complicadas. Esto nos sugiere que a las expresiones complicadas también se puede aplicar el método de los esquemas. Así como es posible mediante un

esquema, esplayar todas las relaciones existentes entre la verdad y la falsedad de las variables y la verdad y la falsedad de la conjunción, la disyunción y la implicación, así también es posible desplegar por medio de esquemas similares todas las relaciones existentes entre la verdad y la falsedad de las variables y la verdad y la falsedad de las proposiciones más complicadas. Pero en este segundo caso hay una diferencia. La verdad y la falsedad de las proposiciones coligativas elementales, conjunción, disyunción e implicación dependen directamente de la verdad y falsedad de sus componentes, mientras que en el caso de las proposiciones más complicadas depende de manera indirecta. Esto es fácil de comprender porque en el caso de una proposición complicada, se supone que la verdad de las proposiciones componentes, que son conjunciones, disyunciones e implicaciones tengan también influencia sobre ella. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$p \vee q \rightarrow p \wedge q$$

Se trata, como indica la puntuación, de una implicación, cuyo antecedente es una disyunción y cuyo consecuente es una conjunción. Es fácil ver que es posible determinar el esquema de esta expresión. Para ello se colocan las variables en el margen y la proposición compuesta en el cuerpo.

Como la verdad y la falsedad de la implicación depende de la verdad y la falsedad de la disyunción y de la conjunción, tenemos que determinar los casos en que éstas son verdaderas y falsas. Pero para ello debemos

aplicar las reglas de los esquemas que ya conocemos. Tendremos entonces:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$	
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

Obsérvese que las reglas que hemos aplicado son exactamente las mismas de los esquemas correspondientes. La disyunción es siempre verdadera, menos cuando las dos componentes son falsas, y la conjunción sólo es verdadera cuando las dos componentes son verdaderas, siendo falsa en todos los demás casos. Una vez que hemos determinado la verdad y la falsedad de la disyunción y de la conjunción en relación a las variables, sobre esta base, determinamos la verdad y la falsedad de la compuesta total. Llegamos así a:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$		
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Hemos indicado con las flechas que la verdad y la falsedad de la compuesta se determina por medio de la verdad y la falsedad de las componentes. De esta manera, el lector no puede equivocarse. La determinación del esquema de la proposición compuesta por la combinación de las proposiciones elementales consta así de dos etapas. En la primera etapa se determina la verdad y la falsedad de las proposiciones elementales, aplicando las reglas conocidas. Y una vez hecho esto, partiendo de los resultados obtenidos se determina la verdad y la falsedad de la proposición compuesta final.

La determinación del esquema que antecede nos hace ver la posibilidad de determinar todos los esquemas correspondientes a combinaciones de proposiciones coligativas elementales, por más complicados que ellas sean. La regla es siempre la misma, no hay más que aplicarla. La única diferencia entre un esquema y otro es que mientras más complicada es la proposición, más largo será el procedimiento. Los siguientes ejemplos nos permitirán adquirir cierta práctica en la determinación de cualquier esquema.

universalidad
del método
de los es-
quemas

1)

p	q	$p \wedge q, \vee, p \vee q$		
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	F

2)

p	q	$p \rightarrow q, \vee, p \wedge q$		
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

3)

p	q	$p \wedge q, \rightarrow, p \vee q$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

4)

p	q	$p \wedge q, \wedge, p \vee q, \rightarrow, p \rightarrow q$					
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V

5)

p	q	$p \wedge q, \rightarrow, p \vee q, \rightarrow, p \vee q, \rightarrow, p \wedge q$							
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	F	F

Hemos puesto las flechas para que el estudiante pueda seguir paso a paso la determinación de las V y las F correspondientes a las diversas proposiciones elementales que integran las proposiciones totales. Siguiendo la marcha de las flechas se desprende la regla que se aplica universalmente en todos los casos. Esta regla consiste en determinar primero los arreglos de las V y las F que corresponden a las proposiciones elementales. Como recordamos, una proposición coligativa se llama elemental cuando es una conjunción, una disyunción o una implicación. El criterio para reconocer las proposiciones elementales en los esquemas considerados es la ausencia de puntos en los símbolos de coligación. Lo primero que debe hacerse, pues, para empezar a elaborar el esquema, es buscar todas las proposiciones coligativas que consisten sólo en la unión de variables, de manera que su símbolo de coligación " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\rightarrow$ ", no esté enmarcado por ningún punto. Una vez encontradas estas proposiciones, se pone debajo de ellas las V y las F correspondientes a sus esquemas conocidos. Pero estas proposiciones forman parte de proposiciones que las contienen como componentes. Toda proposición elemental está unida con otra proposición elemental por un símbolo de coligación (es decir por " $\wedge$ ", o por " $\vee$ ", o por " $\rightarrow$ ") que tienen un punto a cada lado. En consecuencia, el segundo paso consiste en determinar las V y las F de esta proposición combinada, por medio de las V y las F que se han encontrado para las proposiciones elementales. Una vez hecho esto, hay dos posibilidades: o bien terminó el esquema o bien existen más combinaciones. Los ejemplos 1), 2), y 3) corresponden al primer caso; porque se trata de combinaciones que no son muy complicadas. Pero los ejemplos 4) y 5) corresponden al segundo caso. En este último caso, se prosigue el procedimiento de integración. Las proposiciones combi-

etapas de
elaboración
del esquema
coligativo

nadas cuyo principal signo de coligación tiene un punto a cada lado, son a su vez componentes de otra proposición cuyo signo de coligación tiene dos puntos a cada lado. Entonces, partiendo de las V y de las F que están debajo de los signos que tienen un solo punto, se determinan las V y las F que deben quedar debajo del símbolo que tiene dos puntos a cada lado, es decir, las V y las F, de la proposición combinada total.

En caso de que la proposición sea aún más complicada, se sigue el mismo procedimiento, determinando las V y las F de las proposiciones, cada vez más complicadas partiendo de la V y las F de las proposiciones que las integran, hasta llegar al esquema de la proposición total. Como se ve, se trata de un *procedimiento mecánico* muy sencillo, de una regla que se aplica siempre de manera igual y que conduce de manera inevitable a un resultado preciso. El método de los esquemas puede compararse al método de las operaciones elementales de la aritmética: suma, resta, multiplicación, etc. Estos métodos son también reglas mecánicas que se aplican siempre de la misma manera y que conducen siempre a resultados precisos.

§ 24. *Los esquemas de las proposiciones de tres y más variables.* El método que hemos aplicado para determinar los esquemas de las proposiciones complicadas en las que intervienen únicamente dos variables "p" y "q" puede aplicarse, exactamente de la misma manera, a proposiciones que tienen cualquier número de variables. Veamos el caso de una proposición en la que intervienen tres variables:

$$p \wedge q \rightarrow r$$

El método es exactamente el mismo, pero hay un detalle que debe ser analizado antes de proceder a su

aplicación. Cuando se trata de tres variables, las posibles combinaciones entre los valores de las variables, es decir, entre las V y las F, son mucho más numerosas. Cuando se trata de dos variables, hay sólo cuatro arreglos posibles, como se expresa en los esquemas correspondientes:

P	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Pero cuando hay tres variables, en lugar de haber cuatro combinaciones hay ocho, pues es evidente que la variación de los casos aumenta. En efecto, cuando hay tres variables, los casos pueden ser los siguientes:

P	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Así como cuando se trata de dos proposiciones "p" y "q", las dos pueden ser verdaderas y las dos pueden ser falsas, así cuando se trata de tres proposiciones, las tres pueden ser verdaderas y las tres pueden ser falsas. Pero cuando hay alternativas las variaciones son mucho más numerosas, pues cuando se trata de dos proposicio-

nes una puede ser verdadera y la otra falsa y viceversa, mientras que cuando se trata de tres proposiciones las dos primeras pueden ser verdaderas y la tercera falsa, o la primera puede ser verdadera y la segunda y la tercera falsas, o la primera y la tercera pueden ser verdaderas y la segunda falsa, o las dos primeras pueden ser falsas y la tercera verdadera, y así sucesivamente, hasta agotar las ocho posibilidades.

4)

Regresando ahora a nuestra proposición de tres variables:

$$p \wedge q \rightarrow r$$

observamos una cosa muy importante: para hacer intervenir las tres variables ha sido necesario emplear una proposición de dos variables. La proposición de tres variables es una implicación, cuyo antecedente es una conjunción de dos variables y cuyo consecuente es una proposición cualquiera representada por una variable. Todas las proposiciones de tres variables pueden representarse siempre por medio de combinaciones de proposiciones de dos variables. En general, una proposición de cualquier número de variables se expresa como una combinación de varias proposiciones de dos variables. Por ejemplo:

$$p \wedge q \rightarrow r \vee s$$

$$p \wedge q \vee r \wedge s \rightarrow s \vee t$$

$$p \wedge q \rightarrow p \wedge s \rightarrow s \vee t \rightarrow t \vee u, \text{ etc.}$$

Esto es muy importante porque hace posible aplicar el método de los esquemas con toda facilidad a los casos de combinaciones en las que intervienen variables diversas. Consideremos nuestro primer ejemplo:

$$p \wedge q \rightarrow r$$

Es evidente que para determinar su esquema bastará determinar primero los arreglos del antecedente y los del consecuente; y luego se determinarán, sobre esta base, los arreglos de la proposición total. Pero el antecedente es una proposición de dos variables, es decir elemental, y el consecuente es una sola variable. En consecuencia, sabemos cómo proceder para determinar el arreglo de las V y las F que les corresponden. El antecedente es una conjunción y el consecuente, por ser solamente la variable "r", tendrá los mismos valores que tiene en el margen. Sobre esta base se determinará el arreglo que corresponde a la implicación.

etapas de la
elaboración
del esquema
coligativo

p	q	r	$p \wedge q \rightarrow r$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Obsérvese que en el caso de la conjunción, cuando intervienen solamente dos variables, se encuentra una

sola V en primer lugar y todos los demás valores son F. Pero, cuando intervienen tres variables, la conjunción, cuyos componentes son "p" y "q" tiene un arreglo de valores que comienza por dos V seguidas. Ello se debe a que como hay ocho combinaciones, en las dos primeras combinaciones "p" y "q" son ambas verdaderas. La verdad de ambas, se combina con la verdad y la falsedad de "r". Esto es lo que hace que el arreglo correspondiente a la conjunción tenga dos V seguidas. Como, se ve, todas las determinaciones de las V y las F de los arreglos se efectúan de acuerdo a las reglas que se aplican en el caso de los esquemas elementales. El método de los esquemas se aplica por eso siempre de la misma manera, basta para ello fijarse bien en las correspondencias de las V y de las F y en las reglas de los esquemas elementales y tener en cuenta que mientras más combinaciones hay, más se repiten las correspondencias de los esquemas elementales.

Los siguientes ejemplos muestran esquemas de diversas proposiciones:

p	q	r	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\vee$ r
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

p	q	r	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

p	q	r	s	$p \vee q \rightarrow p \vee r : \rightarrow r \wedge s$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	V	F	V	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	V	F
F	F	F	F	F

En los tres ejemplos considerados hemos prescindido ya de las flechas. En ningún texto corriente sobre lógica se usan flechas para indicar el orden en el que se debe ir determinando los arreglos de las V y F correspondientes a las diversas proposiciones componentes que integran la proposición total. Nosotros lo hemos hecho por razones pedagógicas. Pero una vez que el lector comprende el método de la puntuación, es muy simple saber cuáles son los arreglos que deben determinarse primero, para, sobre la base de éstos, ir determinando los arreglos de las V y F que corresponden a las proposiciones cada vez más complicadas, hasta llegar al arreglo de la proposición global.

§ 25. *Nuevas formalizaciones: cambio de variables y negación.* Como una variable proposicional no es sino un símbolo que designa cualquier proposición, nada impide cambiar una variable por otra sin que varíe el sentido de la expresión. De acuerdo a una convención que es seguida casi universalmente, cada vez que hemos hablado de proposiciones coligativas de dos variables, hemos empleado las variables "p" y "q":

cambio de
variables

$$p \wedge q \quad p \vee q \quad p \rightarrow q$$

$$p \wedge q. \rightarrow. p \vee q, \text{ etc.}$$

Y cada vez que hemos hablado de proposiciones de tres variables hemos empleado las variables "p", "q" y "r":

$$"p \wedge q. \rightarrow r" \quad "p \wedge r. \rightarrow. q \vee r"$$

$$"p \rightarrow q. \wedge. q \rightarrow r: \rightarrow. p \rightarrow r", \text{ etc.}$$

Cada vez que hemos hablado de proposiciones de cuatro variables hemos empleado las variables "p", "q", "r", "s", y así sucesivamente. Pero ello se debe sencillamente a que el uso y, sobre todo, la comodidad, han contribuido a que se empleen siempre las mismas variables. Sin embargo pueden emplearse cualesquiera variables. Así, en lugar de poner:

$$p \wedge q \quad p \vee q \quad p \rightarrow q$$

se puede poner:

$$\begin{array}{ccc} p \wedge r & q \wedge r & \\ r \wedge s & p \vee t & p \rightarrow r \quad q \rightarrow r \\ r \rightarrow s, \text{ etc.}, \text{ etc.} & & \end{array}$$

Y en lugar de poner:

$$\begin{array}{ccc} p \wedge q \rightarrow r & & \\ p \wedge r \rightarrow q \vee r & & \\ p \wedge q \rightarrow r \vee s & & \end{array}$$

se puede poner:

$$\begin{array}{ccc} r \wedge s \rightarrow t & & \\ p \wedge s \rightarrow r \vee s & & \\ r \wedge s \rightarrow t \vee u, \text{ etc.}, \text{ etc.} & & \end{array}$$

Desde luego que, si se quiere calcular los esquemas de las expresiones consideradas, habrá que guardar la adecuada relación entre las variables y los arreglos de

las V y las F. Así, si en lugar de poner " $p \wedge q$ " ponemos " $r \wedge s$ ", el esquema será como sigue:

r	s	$r \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Hasta este momento hemos analizado una serie de combinaciones entre las proposiciones coligativas elementales, algunas de las cuales son no sólo complicadas sino interesantes. Pero no hemos hablado para nada de la negación. La negación es un elemento lógico importantísimo. Es tan importante como la afirmación. Si no fuera porque existe la negación sería prácticamente imposible hablar, nuestro lenguaje sería limitadísimo. Sería imposible sobre todo expresar la falsedad de las proposiciones y no podríamos distinguir entre las proposiciones verdaderas y las falsas: el conocimiento científico sería imposible. A pesar de ello hemos silenciado la negación porque su inclusión habría complicado el formalismo. Pero ahora que el lector tiene ya cierta práctica con el lenguaje artificial y formalizado de la lógica, ha llegado el momento de introducir la negación.

El símbolo lógico de la negación es " $\sim$ ". Así, si " p " simboliza una proposición cualquiera, " $\sim p$ " simboliza una proposición negativa cualquiera. Por ejemplo, si se reemplaza a " p " por "Napoleón fue un gran general", " $\sim p$ " significará: "Napoleón no fue un gran general". Si " p " significa "Juan es estudioso", " $\sim p$ " significará: "Juan no es estudioso"; si " p " significa: "Todos los alumnos son estudiosos", " $\sim p$ " significará:

“No todos los alumnos son estudiosos” o, lo que es lo mismo: “algunos alumnos no son estudiosos”, etc.

Como las proposiciones negativas pueden combinarse entre sí y con las proposiciones afirmativas, en nuestro formalismo las variables pueden ser negadas en los casos más diversos. Así, en relación a la conjunción pueden existir tres casos de combinación:

Lima es la capital del Perú y Londres no es la capital de Francia.

Lima no es la capital de Colombia y Londres es la capital de Inglaterra.

Lima no es la capital de Francia y Londres no es la capital de Alemania.

Formalizando estos tres casos se obtienen las tres expresiones:

$$p \wedge \sim q \quad \sim p \wedge q \quad \sim p \wedge \sim q$$

Lo mismo puede decirse de la disyunción y de la implicación. El primer problema que se presenta es la repercusión que la negación de las variables habrá de tener en la determinación de los esquemas. Pero la solución se halla de inmediato si se piensa que la negación tiene un claro significado lógico y, en consecuencia, debe tener un esquema perfectamente determinable. En efecto, el sentido lógico de la negación es que la negación se refiere siempre a la verdad de las proposiciones. Negar una proposición es lógicamente equivalente a afirmar que dicha proposición no es verdadera. En consecuencia, es evidente que si se niega una proposición verdadera, la proposición resultante será falsa y, en cambio, si se niega una proposición falsa, la proposición resultante será verdadera.

Ejemplo: sea la proposición verdadera:

“Lima es la capital del Perú”

Su negación:

“Lima no es la capital del Perú”
será una proposición falsa.

Sea ahora la proposición falsa:

“Londres es la capital de Francia”

Su negación:

“Londres no es la capital de Francia”
será una proposición verdadera.

Esto nos permite construir el esquema general de la negación. Como se trata de una sola variable, en el margen irá una sola variable, es decir, la variable negada. Tenemos, entonces:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Como se ve, si “p” es verdadera, su negación será falsa, mientras que si “p” es falsa, su negación será verdadera. Los valores V y F no se han puesto debajo de “p”, sino debajo del símbolo lógico que es el que determina el sentido lógico de la proposición. Es por la misma razón que en el caso de dos variables, el arreglo final va siempre debajo del símbolo de coligación.

Veamos ahora los casos en que la negación interviene en las proposiciones más complicadas. Suponga

mos que tenemos la expresión " $p \wedge \sim q$ ". ¿Cómo debemos determinar su esquema? Si pensamos en el esquema general de la negación la respuesta es obvia. " $p \wedge \sim q$ " significa que se afirma la primera y se niega la segunda es decir " q ". Esto quiere decir que ahora los valores que deben quedar debajo de " $\sim q$ " son exactamente los contrarios de los que quedaban debajo de " q ". Si debajo de " q " había una V, debajo de " $\sim q$ " debe haber una F, y si debajo de " q " había una F, debajo de " $\sim q$ " debe haber una V. Una vez que se determinan estos valores, se procede de acuerdo al método conocido, es decir, se determinan los valores de la proposición compuesta de acuerdo con los valores de " p " y de " $\sim q$ ". Por razones pedagógicas, en nuestros primeros ejemplos vamos a poner debajo de " $\sim q$ " los valores correspondientes. Y al hacer esto, nos vemos también, obligados, para facilitar la lectura del esquema, a poner los valores que corresponden a " p " debajo de la misma " p ". Una vez que se han puesto estos valores, se determinan los valores que corresponden a la conjunción (o a cualquier otra proposición elemental) partiendo de los valores que se han puesto debajo de las anteriores variables.

Así, el esquema de " $p \wedge \sim q$ " será:

$p \quad q$		$p \wedge \sim q$		
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	F	V

Debajo de "p" se han puesto los mismos valores que corresponden a "p" en el margen, porque "p" no está negada, y en consecuencia sus valores no han variado. Pero debajo de " $\sim q$ " se han puesto los valores contrarios, debido a la negación. Los valores correspondientes a la conjunción, no se determinan ya partiendo del margen, sino partiendo de los arreglos de las proposiciones componentes. Por eso el lugar de la única V ha variado.

De acuerdo con este criterio, se construirán los esquemas correspondientes a los casos restantes:

p q		$\sim p \wedge q$			p q		$\sim p \wedge \sim q$		
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	V	V

En el último esquema, es decir en el de " $\sim p \wedge \sim q$ " se han invertido los valores correspondientes a "p" y a "q", puesto que ambas variables han sido negadas.

Aplicando las mismas consideraciones a los casos de la disyunción y de la implicación, se tiene los siguientes esquemas:

p q		$p \vee \sim q$			p q		$\sim p \vee \sim q$		
V	V	V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	V	V	V

etc., etc.

p q		$\sim p \rightarrow q$		
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Veamos ahora un caso más complicado, por ejemplo:

$$p \wedge \sim q \rightarrow \sim p \wedge q$$

Su esquema será:

p	q	$p \wedge \sim q \rightarrow \sim p \wedge q$				
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Obsérvese que el procedimiento es en todo igual al seguido en los casos en que no interviene la negación. La única variación es en relación a las proposiciones elementales, en las que se ha puesto, cuando hay negación, debajo de las variables componentes los arreglos de las V y las F.

En todos los casos considerados hasta el presente se ha tratado de negaciones aplicadas a las variables que designan a las proposiciones componentes. Pero puede darse el caso de que la negación se aplique a toda la expresión compuesta. En este caso el método más conveniente es el uso de paréntesis. Así, si se quiere negar toda la expresión " $p \wedge q$ " se pondrá " $\sim(p \wedge q)$ ", si se quiere negar toda la expresión " $p \vee q$ " se pondrá " $\sim(p \vee q)$ ", etc. Y cuando se trata de expresiones más

complicadas, como por ejemplo " $p \wedge q \rightarrow r$ s" se pondrá: " $\sim(p \wedge q \rightarrow r)$ s".

Cuando el símbolo de la negación se aplica a toda la expresión, es evidente que en este caso la determinación del esquema se hará en dos etapas: en la primera se determina el esquema de la expresión que queda dentro del paréntesis, para lo cual se aplicarán las reglas conocidas. Y una vez hecho esto, se pondrán, debajo del símbolo de negación que niega toda la expresión, los valores inversos de los valores que corresponden a la expresión que queda dentro del paréntesis. Así se tendrá:

p q		$\sim(p \wedge q)$	p q		$\sim(p \vee q)$
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

p q		$\sim(p \rightarrow q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

En caso de expresiones más complicadas, como $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$, tendremos:

p q		$\sim(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p)$			
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

En caso de que haya también negaciones de las variables, tendremos:

p q		$\sim(p \wedge \sim q)$				p q		$\sim(\sim p \vee q)$			
V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F

p q		$\sim(p \wedge q \rightarrow \sim p \vee \sim q)$							
V	V	F	V	V	V	V	V	F	
V	F	F	F	V	V	V	V	V	
F	V	F	F	V	F	F	F	F	
F	F	F	F	V	F	V	V	V	

Ejercicios

1) Formalizar, por medio de expresiones coligativas, las siguientes proposiciones, indicando: por medio de las variables, de los símbolos de coligación y de la puntuación, todas las proposiciones coligativas elementales y la forma como se combinan para formar la proposición total. Si la proposición compuesta es elíptica, deben indicarse y formalizarse todas sus proposiciones componentes.

- a) Si Juan viene mañana y si María viene mañana, entonces vamos al cinema.
- b) Si a es un cateto del triángulo T , y b es otro cateto del triángulo T , y c es la hipotenusa del triángulo T , entonces, $a^2 + b^2 = c^2$.
- c) Dos o menos dos es la raíz cuadrada de cuatro.
- d) Tres o cinco son divisores de quince, y cinco o siete son divisores de treintaicinco.
- e) Si cinco es un divisor de quince, y si quince es un divisor de cuarenticinco, entonces, cinco y quince son divisores de cuarenticinco.
- f) Si los cuerpos se calientan, se dilatan, y si las moléculas de los cuerpos aumentan su movimiento, entonces los cuerpos se calientan.
- g) Si Juan o Manuel o María o Leonor vienen, entonces te vas a pasear.

2) Sean las tres proposiciones:
"A es perpendicular a C"

"B es perpendicular a C"

"A es paralela a B.

Designemos por "p" la primera proposición por "q" la segunda y por "r" la tercera.

Formalicemos ahora las siguientes proposiciones compuestas.

- a) Si A es perpendicular a C y B es perpendicular a C, entonces A es paralela a B.
- b) Si A es perpendicular a C y B no es perpendicular a C, entonces A no es paralela a B.
- c) Si A es perpendicular a C o B es perpendicular a C, entonces, A es paralela a B o A no es paralela a B.
- d) Si A no es paralela a B, entonces A no es perpendicular a C o B no es perpendicular a C.
- e) Si A es perpendicular a C, y B no es paralela a B, entonces B no es perpendicular a C.

- 3) Determinar los esquemas de las siguientes expresiones coligativas:

- a) $p \wedge q$
- b) $p \wedge q \vee r$
- c) $p \rightarrow q \rightarrow r$
- d) $p \rightarrow q \rightarrow q$
- e) $p \vee q \wedge q \vee q$
- f) $p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge q$
- g) $p \wedge q \wedge r \rightarrow p \vee q \rightarrow q \vee r$
- h) $p \wedge \sim q \rightarrow \sim p \wedge r$
- i) $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p \wedge p \rightarrow r \rightarrow r \rightarrow r$
- j) $\sim p \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p \wedge \sim r \rightarrow \sim p \wedge q \rightarrow \sim r$
- k) $p \wedge q \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim r \wedge s \rightarrow p \rightarrow s$

- 4) Decir si las siguientes fórmulas son o no son equivalentes.

a) $\sim(p \rightarrow q)$, $p \wedge \sim q$

b) $p \wedge q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$

c) $p \wedge q \vee r$, $p \wedge q \vee p \wedge r$

d) $p \vee q \wedge r$, $p \wedge q \wedge r$

e) $\sim(p \wedge q)$, $p \rightarrow \sim q$

f) $p \rightarrow q \rightarrow r$, $\sim[p \wedge \sim[\sim(q \wedge \sim r)]]$

g) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow q$, $p \vee q \rightarrow r$

Capítulo VII

LA INFERENCIA COLIGATIVA ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DEDUCTIVOS

Los principios lógicos. - Análisis de la inferencia en la conversación y en el conocimiento científico.

§ 26. *Los principios lógicos.* En los numerosos ejemplos de inferencia coligativa que hemos analizado en los capítulos anteriores, podemos encontrar un tipo muy especial de esquema, cuya significación y utilidad estamos ahora en condiciones de apreciar: el esquema en el cual, debajo del principal símbolo de coligación sólo hay V y no existe F. Así, en la página tenemos la siguiente proposición " $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ ", cuyo esquema es:

p	q	$p \wedge q$	$\rightarrow$	$p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

El esquema nos revela algo muy interesante sobre la proposición, nos dice que es una proposición cuya verdad es independiente de la verdad o falsedad de sus proposiciones componentes. En las proposiciones coligativas corrientes, la verdad y la falsedad de las proposi-

hay proposiciones coligativas siempre verdaderas, sean cuales sean sus componentes

ciones componentes influye siempre en la verdad y falsedad de las proposiciones compuestas. En las proposiciones elementales, esta influencia es directa, y en las proposiciones compuestas por combinaciones de las elementales, se trata de una influencia indirecta, a través de las elementales, pero no por eso menos precisa y determinada. Así, tenemos:

p	q	$p \wedge q$	p	q	$q \vee q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

p	q	$p \vee q$	$q \rightarrow p$	$p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

p	q	$p \rightarrow q$	$q \wedge p$	$p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

p	q	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$	$p \wedge q$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

y fal
propo
en las
as ele
través
y de

Empero, los esquemas correspondientes a las pro-
posiciones " $p \wedge q. \rightarrow. p \vee q$ ", " $p \wedge q. \rightarrow. p \rightarrow q$ ",
" $\sim p \rightarrow p. \rightarrow. p$ ", " $p \rightarrow q. \rightarrow. \sim q \rightarrow \sim p$ ", son:

p	q	$p \wedge q. \rightarrow. p \vee q$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

p	q	$p \wedge q. \rightarrow. p \rightarrow q$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

p	$\sim p \rightarrow p. \rightarrow. p$		
V	V	V	V
F	F	V	F

p	q	$p \rightarrow q. \rightarrow. \sim q \rightarrow \sim p$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

Es evidente que las proposiciones que tienen esquemas como los que acabamos de considerar son muy diferentes de las restantes. Porque tienen una cualidad excepcional: su verdad no depende de la verdad ni de la falsedad de las proposiciones, simples o compuestas, que las integran. Pero si su verdad no depende de la verdad o falsedad de sus proposiciones componentes, entonces es una verdad muy particular, una verdad que se impone de todas maneras, con una especie de fuerza interna. Las expresiones coligativas corrientes tienen una verdad y una falsedad que varía con la verdad y la falsedad de sus proposiciones componentes. Por eso son a veces verdaderas y a veces falsas. Pero el tipo de expresiones que estamos considerando tiene una verdad permanente, una especie de verdad absoluta. Se trata de proposiciones que son siempre verdaderas, sea cual sea la condición de sus componentes. Son proposiciones que se imponen al pensamiento, que son así por necesidad.

No podemos pues dudar de que estamos ante proposiciones privilegiadas, porque son proposiciones verdaderas en sí mismas, es decir, cuya verdad depende única y exclusivamente de su forma o estructura y no se funda en la relación de la proposición con los hechos que describe. Debido a este privilegio de ser necesariamente verdaderas, de constituir, por así decirlo, como una necesidad del pensamiento, como un reino aparte en que la verdad refulge intangible y necesaria sin recibir ninguna influencia perturbadora del mundo real, las proposiciones mencionadas se denominan *principios lógicos*.

A pesar de todas las limitaciones que tuvieron los griegos en su estudio de la lógica, fueron sin embargo capaces de descubrir los principios lógicos. Empero no pudieron descubrir sino tres de ellos, que han tenido una inmensa importancia no sólo en la historia de la lógica sino en toda la historia de la filosofía. Parmé-

los tres principios lógicos clásicos

Amides, nacido el año 540 antes de Cristo, descubrió el primero de todos, llamado posteriormente *principio de identidad*; Platón descubrió el segundo principio, denominado *principio de no contradicción* o simplemente, *para mayor comodidad, principio de contradicción*; y Aristóteles descubrió el tercero, el llamado *principio del tercio excluido*. Estos descubrimientos fueron tan importantes que, en la antigüedad no fueron bien comprendidos. Durante la Edad Media hubo gran oscuridad al respecto y muchos filósofos les atribuyeron cualidades teológicas y hasta místicas. El prestigio de los tres principios era tan enorme, que el mismo Leibniz, que comprendió su naturaleza lógica, les atribuyó cualidades demasiado grandiosas, que rebasaban el campo de la mera lógica. Kant tiene el mérito de haber sido el primero en haber captado plenamente su significación¹.

En la actualidad sabemos que no sólo hay tres principios sino muchos. Los pocos ejemplos que hemos dado nos muestran ya que son más de tres. En realidad los principios lógicos son inagotables. Combinando proposiciones coligativas de manera adecuada es posible construir nuevos principios cada vez más complicados. Hay, incluso, reglas especiales para poder construir principios.

En los ejemplos anteriores hemos considerado principios que incluyen una y dos variables, pero nada im-

infinitud de
los principios
lógicos

Es fácil comprender por qué los tres primeros principios descubiertos tuvieron tanto prestigio y por qué los filósofos de otras épocas les atribuyeron cualidades tan excepcionales. Al descubrirlos, el ser humano descubrió por vez primera la posibilidad de llegar a verdades absolutas, a proposiciones verdaderas cuya verdad no dependiera de los hechos cambiantes y deleznales del mundo real. Los tres principios permitieron comprender a los filósofos que el pensamiento constituye un mundo especial, un mundo aparte con leyes propias diferentes de las leyes que rigen el movimiento de los fenómenos de la naturaleza. A este descubrimiento también contribuyó el desarrollo de la matemática griega que, desde sus inicios estuvo estrechamente ligada a la teoría de los principios lógicos

pide utilizar principios que incluyan tres y más variables. En la práctica del análisis lógico, estos principios se emplean con frecuencia, como por ejemplo, el principio siguiente: $p \rightarrow q, q \rightarrow r : \therefore p \rightarrow r$ cuyo esquema es:

p q r	$p \rightarrow q, q \rightarrow r : \therefore p \rightarrow r$				
V V V	V	V	V	V	V
V V F	V	F	F	V	F
V F V	F	F	V	V	V
V F F	F	F	V	V	F
F V V	V	V	V	V	V
F V F	V	F	F	V	V
F F V	V	V	V	V	V
F F F	V	V	V	V	V

Es interesante observar que los tres famosos principios descubiertos por los griegos contenían sólo una proposición. Son pues, principios muy simples, a pesar de lo cual, como veremos de inmediato, son de extraordinaria utilidad para realizar inferencias o deducciones. Es curioso, pero a pesar de que los descubrimientos de Aristóteles sobre el silogismo, superan en complejidad y brillo, al descubrimiento de los principios coligativos, desde el punto de vista de la utilidad y de la aplicación, los principios coligativos son muchísimo más importantes que el silogismo. Muy rara vez se emplea el silogismo en un razonamiento efectuado en la vida corriente, en la ciencia o la filosofía. En cambio los principios se emplean de manera permanente en los más diversos campos.

El primer principio se enuncia como sigue: toda proposición verdadera es verdadera. En lenguaje moderno significa que toda proposición se implica a sí misma, porque si se implica, es evidente que, si es verdadera, entonces es verdadera. El principio suena a truismo a enunciado superficial e ingenuo. Empero esta aparien-

cia se deriva de su evidencia incontestable porque si no se acepta su validez no puede pensarse ni efectuarse ningún razonamiento. Su enunciado es " $p \rightarrow p$ " y su esquema:

p	$p \rightarrow p$
V	V
F	V

El principio de contradicción se enuncia clásicamente: dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas. Su enunciado es: " $\sim (p \wedge \sim p)$ " y su esquema:

p	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	V
F	F

El signo de negación aplicado a todo el paréntesis niega la verdad de la conjunción dentro del paréntesis. Esta conjunción es " $p \wedge \sim p$ " es decir la afirmación de que " p " y " $\sim p$ " son las dos verdaderas. El principio niega esta afirmación, nos dice que " p " y " $\sim p$ " no son ambas verdaderas, nos dice que es falso que las dos sean verdaderas.

El principio del tercio excluido nos dice que una proposición cualquiera es verdadera o es falsa. Por eso se llama del *tercio excluido* porque excluye la posibilidad de que una proposición pueda ser otra cosa además de verdadera o falsa. Si " p " es una proposición verdadera cualquiera, su falsedad se enunciará como " $\sim p$ ". Por eso, el principio es " $p \vee \sim p$ " y su esquema:

§ 27. *Los principios lógicos y la inferencia.* Los principios lógicos constituyen la base, el fundamento mismo, de todo proceso de inferencia.

Hemos visto en diversas oportunidades que la inferencia o deducción tiene siempre forma hipotética. La deducción consiste en pasar de la verdad de una proposición (o de varias) a la verdad de otra proposición. Este paso es condicional o hipotético, es decir, consiste en demostrar que si el punto de partida es verdadero, el punto de llegada deberá necesariamente también serlo. Pero ¿cómo es posible este paso? ¿Por qué se puede deducir una proposición de otra? Ahora ha llegado el momento de comprenderlo.

El paso deductivo es posible, el paso de la verdad de una proposición a la verdad de otra, es posible, *porque la implicación que une la proposición en el punto de partida con la proposición del punto de llegada, no es una implicación corriente, sino la implicación de un principio lógico.* Si se tratase de una implicación corriente, la inferencia no podría realizarse, no tendría el carácter de necesidad que debe tener toda inferencia o deducción para ser tal.

Un ejemplo aclarará lo dicho. Se trata de un ejemplo superficial y artificioso, totalmente redundante, pero sumamente cómodo y que permite comprender perfectamente lo que hemos descrito. Sobre la base de este ejemplo, se podrán dar ejemplos interesantes que serán fácilmente comprendidos.

Partamos del principio lógico " $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ ". Su esquema es:

Como se ve, el principio es absolutamente verdadero, su verdad no depende ni de la verdad ni de la falsedad de "p" y de "q". Supongamos ahora que, mediante el empleo de algún método, se demuestra la verdad de " $p \wedge q$ ". Este método puede ser empírico, puede consistir en la observación de algún fenómeno natural, o puede ser lógico, puede ser alguna deducción o inferencia. Pero sea como sea, hemos establecido la verdad de " $p \wedge q$ ". Entonces, la verdad de " $p \vee q$ " se puede deducir de la verdad de " $p \wedge q$ ". En efecto, el principio lógico nos dice que, sea cual sea la naturaleza de las proposiciones "p" y "q", si " $p \wedge q$ " es verdadera, entonces es verdadera la proposición " $p \vee q$ ". En consecuencia, si probamos la verdad de " $p \wedge q$ ", habremos, de hecho, probado la verdad de " $p \vee q$ " y habremos llegado así a una nueva verdad¹.

Veamos ahora un ejemplo mucho más interesante: el principio llamado de la *contraposición*: " $p \rightarrow q \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ " cuyo esquema es:

p q	$p \rightarrow q \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p$		
V V	V	V	V
V F	F	V	F
F V	V	V	V
F F	V	V	V

1 El ejemplo es redundante y superficial, porque es intuitivamente evidente que si "p q" es verdadera, " $p \vee q$ " tendrá también que serlo. En efecto, "p q" significa que las dos proposiciones componentes son verdaderas, y por eso, si las dos son verdaderas, por lo menos una de ellas tendrá que serlo. Pero es precisamente lo que significa " $p \vee q$ ". Empero, a pesar de su superficialidad, el principio no deja de ser un principio lógico como cualquier otro.

Como se ve, tanto en su antecedente como en su consecuente hay combinaciones coligativas de "p" y de "q". Cuando se habla de la proposición del antecedente y de la proposición del consecuente en un principio lógico, se sobreentiende que por lo menos una de ellas es coligativa, y que está integrada por lo menos por dos variables. Si se logra probar de alguna manera que la implicación " $p \rightarrow q$ " es verdadera, entonces, de manera necesaria, automática, inevitable, queda probado que " $\sim q \rightarrow \sim p$ " es también verdadera. Como se trata de un principio, que es una proposición siempre verdadera, es indiscutible que, si el antecedente es verdadero, el consecuente tiene que ser necesariamente verdadero, porque si el consecuente fuera falso, la implicación total sería falsa, puesto que una implicación cuyo antecedente es verdadero y cuyo consecuente es falso, es falsa. Pero si la implicación es un principio lógico, no puede ser falsa, porque la esencia del principio lógico es que siempre es verdadero. En consecuencia, si se prueba la verdad del antecedente, queda probada la verdad del consecuente. En otras palabras, si se prueba la verdad del antecedente, es posible deducir de esta verdad, la verdad del consecuente.

Vamos ahora a aplicar este principio a un ejemplo sencillo de inferencia, muy sencillo es cierto, pero muy ilustrativo.

Durante una reunión social tres personas conversan: Juan, Héctor y Timoteo. Timoteo es muy vanidoso y pontifica sobre todas las cosas. En un momento de la conversación, sostiene que es catedrático universitario y que enseña un curso de matemáticas superiores. Cuando termina la reunión, Juan y Héctor salen juntos de la fiesta y Juan dice a Héctor: "Oye, ese tipo Timoteo es un farsante, ni es profesor ni es nada". "¿Cómo lo sabes?", pregunta Héctor intrigado. Muy sencillo, por-

que durante la conversación, de casualidad, me referí al nombre de David Hilbert, uno de los matemáticos más geniales y más conocidos de nuestro siglo, y no sabía quién era. Y es imposible que un catedrático de matemáticas superiores no sepa quién es Hilbert. Héctor quedó completamente convencido ante los argumentos de Juan, y algunos días más tarde descubrió que, en efecto Timoteo no era catedrático universitario y no sabía ni una palabra de matemáticas superiores. Veamos cuál fue el razonamiento de Juan. Partió de una implicación: Si Timoteo es profesor de matemáticas superiores, entonces Timoteo sabe quién es David Hilbert". Si se representa la proposición "Timoteo es profesor de matemáticas superiores" por "p" y la proposición "Timoteo sabe quién es David Hilbert" por "q", tendremos la implicación " $p \rightarrow q$ ". Esta implicación es empíricamente verdadera, puesto que la observación de los profesores de matemáticas, la conversación con ellos, el escuchar sus palabras, muestra que todos ellos saben quién es Hilbert. Ahora bien, " $\sim q$ " significará, evidentemente: "Timoteo no sabe quién es David Hilbert" y " $\sim p$ " significará: "Timoteo no es profesor de matemáticas superiores". Aplicando el principio de contraposición tenemos: " $p \rightarrow q \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ ". Se trata de una implicación necesariamente verdadera. Y como la implicante " $p \rightarrow q$ " es verdadera, la implicada " $\sim q \rightarrow \sim p$ " debe ser necesariamente verdadera. Porque si no lo fuera, el antecedente $p \rightarrow q$ sería verdadero y consecuentemente $\sim q \rightarrow \sim p$ sería falso. En consecuencia, la proposición $p \rightarrow q \rightarrow \sim p \rightarrow \sim q$ sería falsa, lo que es imposible, porque se trata de un principio lógico. En consecuencia, es cierto que si Timoteo no sabe quién es David Hilbert, no es profesor de matemáticas superiores. El razonamiento de Juan ha sido, pues, inobjetable.

Este ejemplo tiene además otro interés: es un ejem-

plo tomado de la vida diaria, de la conversación cotidiana. El hombre común y corriente hace, durante sus actividades diarias, ya sea en sus conversaciones cotidianas o cuando trabaja profesionalmente, una serie de razonamientos lógicamente rigurosos. Pero los hace de manera intuitiva, sin tener clara conciencia de su forma o estructura. Su intuición, su inteligencia innata, le dicen que sus razonamientos o inferencias están bien hechos, pero si se le pregunta que explique por qué están bien hechos, no sabe qué responder. La lógica permite comprender este tipo de razonamiento y permite justificarlo. La lógica da reglas, como acabamos de ver, que permiten distinguir entre los razonamientos verdaderos y los falaces. Y su campo de aplicación no sólo permite analizar los razonamientos de la ciencia o de la filosofía, sino cualquier tipo de razonamiento posible, incluso hasta los más banales de la vida cotidiana.

Pero naturalmente, la verdadera importancia de la lógica reside en que nos permite comprender el razonamiento científico y filosófico, es decir, el razonamiento que sirve de fundamento al conocimiento profundo y riguroso, al conocimiento que sirve de fundamento a la técnica y a la conquista del mundo por el hombre. Es sobre todo en matemáticas, en donde el razonamiento riguroso llega a su máxima pureza y eficacia. Como ya lo hemos dicho, las matemáticas son una ciencia puramente lógica; una ciencia que sólo emplea un método de conocimiento: la inferencia o deducción. Las demás ciencias emplean también la deducción de manera constante y esencial, pero emplean además otros métodos para la adquisición de conocimientos, especialmente la observación de los hechos y fenómenos naturales o sociales. Pero las matemáticas no emplean sino la deducción para adquirir conocimientos, con la exclusión absoluta de cualquier otro método. Por eso el estudio de la

deducción, como el que estamos haciendo ahora, nos abre de un solo golpe, la comprensión del conocimiento matemático.

Como también hemos ya dicho, la deducción matemática consiste en deducir los teoremas de los postulados. Las proposiciones verdaderas que permiten enunciar los conocimientos matemáticos son los famosos *teoremas* que tanto hemos estudiado a través de toda nuestra Instrucción Secundaria. La verdad de los teoremas se establece única y exclusivamente por medio de la deducción. Los teoremas son pues, siempre, el punto de llegada de la deducción o inferencia. Debe, por eso, haber un punto de partida, un antecedente o implicante que permite derivar la verdad de los teoremas. Este punto de partida son los *postulados o axiomas*. Los postulados o axiomas, son proposiciones matemáticas, cuya verdad se asume hipotéticamente en el punto de partida. La verdad de los postulados o axiomas, siempre se supone, y no se prueba nunca, pues si se tuviese que probar, habría que recurrir a otras verdades anteriores, y éstas serían los verdaderos postulados.

Los axiomas, pues, son el punto de partida de todo conocimiento matemático. Son los *antecedentes*, cuya *verdad implica la verdad de los teoremas*. Partiendo de la verdad de los axiomas, se va deduciendo la verdad de los teoremas. Cuando se deduce un teorema, se obtiene una nueva verdad, es decir, una nueva proposición verdadera, puesto que las verdades del conocimiento se enuncian siempre por medio de proposiciones. En consecuencia, el teorema adquirido, puede servir a su vez de punto de partida, de antecedente para derivar una nueva verdad matemática, es decir, otro teorema. El instrumento que se emplea para deducir los teoremas de los postulados o de los otros teoremas, es siempre el mismo: los principios lógicos. Ya sabemos que hay muchos de es-

punto de par
tida del co
nocimiento
matemático:
postulados o
axiomas (cu
ya verdad n
se prueba)

punto de lle
gada del co
nocimiento
matemático:
teoremas (pued
ser puntos se
cundarios de
partida)

método (co
mo camino
deducción)

tos principios, y acabamos de dar un ejemplo de cómo se aplica el principio de la contraposición para efectuar una deducción. La aplicación de los principios que se hace en matemáticas es en todo igual a la que hemos hecho para demostrar que Timoteo no era catedrático de matemáticas superiores. Pero, naturalmente, es muy variada. Cada demostración de un nuevo teorema, exige un determinado principio lógico que haga posible el proceso deductivo. Hay ciertos teoremas que se demuestran con un mismo principio, pero hay teoremas que exigen principios diferentes. En muchos casos los principios empleados son muy complicados y como veremos en el Capítulo VIII no son proposiciones coligativas. En realidad sólo rara vez puede efectuarse una demostración matemática completa, sólo mediante la aplicación de principios coligativos. Pero, en esencia, se trata siempre de la misma técnica: la aplicación del principio permite mostrar que el teorema es el consecuente de una implicación, y que el antecedente de esta implicación es un postulado, o algún teorema anteriormente demostrado.

Desgraciadamente, analizar en detalle el aspecto lógico de una teoría matemática es algo muy complicado, que excede en mucho los límites de un libro para Instrucción Media. Si quisiéramos analizar en detalle, por ejemplo, la estructura lógica de la Geometría que se estudia en Media, tendríamos que indicar todos los postulados y luego mostrar cómo se van aplicando diversos principios lógicos para ir derivando sucesivamente todos los teoremas que conocemos. Esto se puede hacer y se hace en los cursos superiores de lógica o de filosofía de las ciencias, pero es largo y complicado, pues, como hemos observado, hay ciertos teoremas que sólo pueden derivarse aplicando principios lógicos muy complicados, y a veces varios de estos principios complicados. Pero podemos, en cambio, dar algunos ejemplos

de teoremas sencillos, cuyas demostraciones pueden analizarse con facilidad. En estos casos se puede analizar el aspecto lógico del proceso, que consiste en partir de una verdad matemática (o de varias) ya aceptada, para llegar a una nueva verdad matemática. Estos análisis no nos revelarán todos los aspectos de la inferencia matemática, pero sí nos permitirán comprender la esencia del conocimiento matemático, pues todos los procesos deductivos que conducen a teoremas, por más complicados que sean, siguen, en el fondo, las mismas pautas que las seguidas en nuestros ejemplos.

En álgebra hay un postulado que dice lo siguiente: para todo par de números diferentes, tenemos:

$$x > y \text{ o } y > x$$

Simbolizando la proposición " $x > y$ " por " p ", la proposición " $y > x$ " por " q ", y la disyunción por " $\setminus /$ " tenemos:

$$p \setminus / q$$

De este postulado podemos deducir el siguiente teorema: "si x no es mayor que y , entonces y es mayor que x ". Porque, la siguiente proposición:

$$p \setminus / q : \rightarrow : \sim p \rightarrow q$$

es un principio lógico.

Por tratarse de un principio lógico de forma impliativa, de acuerdo con lo que hemos dicho, se tiene que si su antecedente es verdadero, su consecuente tiene que ser necesariamente verdadero. Pero su antecedente, por ser un postulado, es verdadero, puesto que, por definición, los postulados son proposiciones cuya verdad se afirma sin necesidad de demostración. O sea, la proposición

$$p \setminus / q$$

es verdadera. Y por tratarse de un principio lógico, el consecuente, es decir, la proposición $\sim p \rightarrow q$ también tiene que ser verdadero.

Pero $\sim p$, es $\sim (x > y)$, es decir "x no es mayor que y" y "q" es "y es mayor que x". O sea que ha quedado demostrado el teorema. Se trata por supuesto de un teorema muy simple y superficial, pero que no por eso deja de ser un verdadero teorema.

Las demostraciones que vamos a dar a continuación son ejemplos de un método muy conocido, que todo estudiante de Media ha aplicado alguna vez; **la demostración por el absurdo o apagógica**. Hay dos tipos de demostración por el absurdo: en el primer caso, se parte de una hipótesis afirmativa y se muestra que de esta afirmación se puede deducir su negación, lo que prueba que la hipótesis es falsa. En el segundo caso se parte de una hipótesis negativa, es decir, de la negación de una proposición, y se muestra que de dicha hipótesis se deduce la afirmación de la proposición negada, lo que prueba que dicha afirmación es verdadera. Los principios lógicos empleados son sencillos, puesto que son implicaciones de una sola variable: " $p \rightarrow \sim p \rightarrow \sim p$ " y " $\sim p \rightarrow p \rightarrow p$ ". Ambos principios se denominan "apagógicos".

demostración
apagógica

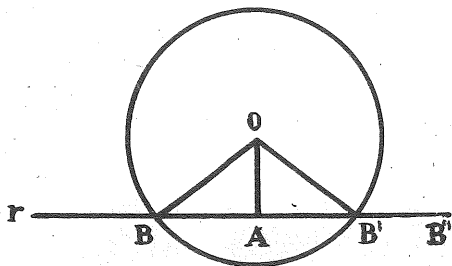
p	$p \rightarrow \sim p \rightarrow \sim p$	
V	F	V F
F	V	V V

p	$\sim p \rightarrow p \rightarrow p$	
V	V	V V
F	F	V F

Vamos a aplicar el primer principio para demostrar el siguiente teorema: **una recta no puede cortar una**

circunferencia en más de dos puntos. El teorema se enuncia mediante una proposición negativa, puesto que la proposición que lo enuncia contiene la palabra "no". Para representar adecuadamente el teorema por medio de una variable proposicional, vamos a asumir que la proposición: "Una recta puede cortar la circunferencia en más de dos puntos" se representa por la variable "p". Por lo tanto, nuestro teorema, que afirma que esto no puede ser, es decir, que una recta no puede cortar la circunferencia en más de dos puntos, se simbolizará por medio de la expresión " $\sim p$ ". Tenemos pues que demostrar la falsedad de "p".

Supongamos que "p" es verdadera, es decir, que una recta puede cortar la circunferencia en más de dos puntos. Para ver si esto es posible, ayudémonos de figuras geométricas. Sea la circunferencia S, de centro O, que es cortada por la recta r. Vemos que la recta corta al círculo en los puntos B y B'. Si bajamos la perpendicular de O al segmento B, B', el punto A estará exactamente al centro. Supongamos que la recta r corta a la circunferencia en un tercer punto, o sea en más de dos puntos. Sea este tercer punto el punto B". Como este punto debe quedar de todas maneras en la circunferencia, la línea que lo une con el centro O, debe ser del mismo largo que los radios BO y B'O, puesto que



también $B''O$ es un radio. Pero si $B''O$ es igual a BO y a $B'O$, entonces B'' debe confundirse con B o con B' puesto que está en la recta r . Porque si no se confunde con dichos puntos, entonces queda fuera de la circunferencia y no la corta. En consecuencia, el punto B'' , es decir, el tercer punto, no puede cortar la circunferencia.

Este razonamiento tiene la siguiente estructura lógica. Se parte de la afirmación de que " p ", como hemos convenido, representa la proposición "Una recta puede cortar la circunferencia en más de dos puntos". Luego se demuestra, por medio de un riguroso procedimiento, que si se asume que dicha recta corta a la circunferencia en más de dos puntos, por ejemplo en tres puntos, B , B' y B'' , el punto " B " se tiene necesariamente que confundir con el punto B o con el punto B' . O sea partiendo de la hipótesis de que una recta puede cortar una circunferencia en más de dos puntos, es decir, partiendo de " p ", se llega a la conclusión de que una recta no puede cortar la circunferencia en más de dos puntos, por ende se llega a " $\sim p$ ". Se ha demostrado así la verdad de la implicación: " $p \rightarrow \sim p$ ". Pero esta implicación cuya verdad se ha demostrado, es el antecedente del principio " $p \rightarrow \sim p \rightarrow \sim p$ ". En consecuencia, si " $p \rightarrow \sim p$ " es verdadero, el consecuente " $\sim p$ " tiene que ser necesariamente verdadero, o lo que es lo mismo, " p " tiene que ser una proposición falsa.

Vamos a aplicar ahora el segundo principio apagógico, a saber: " $\sim p \rightarrow p \rightarrow p$ ".

Escogemos un teorema aritmético bastante irrelevante, pero que permite ver con gran claridad la aplicación de dicho principio. En realidad se trata de un caso particular del teorema fundamental de la aritmética.

El teorema se enuncia como sigue: el número 45 puede expresarse como un producto de potencias de números primos.

La proposición que enuncia el teorema se simboliza por medio de la variable " p ". La proposición contradictoria, es decir, la que niega el teorema, será: "el número 45 no puede expresarse como un producto de potencias de números primos". Se simbolizará por " $\sim p$ ".

Supongamos que " $\sim p$ " es una proposición verdadera, es decir, que " p " es falsa. Si el número 45 no puede expresarse como un producto de potencias de números primos, podrá expresarse como producto de números que no son primos entre sí. Efectivamente esto es posible, pues $45=3 \times 15$. Pero $15=3 \times 5$. Reemplazando a 15 por su valor, tenemos que $45=3 \times 3 \times 5$. Pero $3 \times 3 \times 5$ es igual a $3^2 \times 5^1$, que es un producto de potencias de números primos. En consecuencia de la hipótesis de la verdad de " $\sim p$ ", se llega a la verdad de " p ". Puede pues ponerse " $\sim p \rightarrow p$ ". Pero " $\sim p \rightarrow p$ " es el antecedente del segundo principio apagógico. Este principio es " $\sim p \rightarrow p, p$ ". Como el antecedente es verdadero, el consecuente, debido a la estructura implicativa del principio, tendrá que ser necesariamente verdadero. En consecuencia, la proposición " p " es verdadera. Pero la proposición " p ", según lo convenido en este caso es "el número 45 puede expresarse como un producto de potencias de números primos", que es el teorema que se quería demostrar.

Ejercicios

- 1) Determinar si las siguientes expresiones coligativas son o no son principios.

- a) $p \rightarrow q \rightarrow p \vee q$
- b) $p \wedge \sim p \rightarrow p \rightarrow p$
- c) $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r \rightarrow p \rightarrow r$
- d) $q \rightarrow r \wedge p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow r$
- e) $p \rightarrow q \rightarrow r \equiv p \wedge q \rightarrow r$
- f) $p \vee q \wedge \sim p \rightarrow q$
- g) $p \rightarrow q \vee p \rightarrow r \rightarrow r \wedge q$
- h) $p \rightarrow q \vee r \rightarrow p \rightarrow q \vee p \rightarrow r$
- i) $p \wedge q \vee p \wedge \sim q$
- j) $p \wedge q \vee p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge q$
- k) $p \wedge q \vee p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge q \vee \sim p \wedge \sim q$
- l) $p \vee q \wedge p \vee \sim q$
- m) $p \vee q \wedge p \vee \sim q \wedge \sim p \vee q$
- n) $p \vee q \wedge p \vee \sim q \wedge \sim p \vee q \wedge \sim p \vee \sim q$
- o) $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r \wedge r \rightarrow s \rightarrow p \rightarrow s$

- 2) Analizar y fundamentar lógicamente las siguientes deducciones.

- a) Si x es divisible por 4, entonces x es par;
si x es par, entonces x es divisible por 2;
luego si x es divisible por 4, x es divisible por 2.

demonstración
apagógica

- b) Jorge me dijo que había estado en París,
y me dijo que no había estado en París.
Luego, Jorge es un mentiroso.

- c) Si $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, entonces, es falso que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, luego es falso que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
- d) Si un cuerpo se calienta, entonces, dicho cuerpo se dilata, luego, si un cuerpo no se dilata, entonces dicho cuerpo no se calienta.
- e) Solamente si un ciudadano es lisiado, dicho ciudadano no está obligado a hacer sin servicio militar, luego si dicho ciudadano no está obligado a hacer su servicio militar, dicho ciudadano es lisiado.
- f) Si aumenta el precio de la seda, los comerciantes venden menos seda, y si hay peste en China, aumenta el precio de la seda; luego, si hay peste en China, los comerciantes venden menos seda.

Capítulo VIII

TEORIA DE LAS CLASES

§ 31. *Diversos tipos de inferencia.* Al analizar la inferencia coligativa en los capítulos anteriores, hemos visto que los principios lógicos son un instrumento importantísimo en los procesos deductivos. Aplicando estos principios hemos podido analizar diversos tipos de inferencia, tanto en relación al lenguaje conversacional como en relación a las ciencias, especialmente las matemáticas. Recordando lo que estudiamos en el capítulo anterior, podemos decir que en los procesos de inferencia se aplica un principio lógico de estructura implicativa de tal manera que la proposición que se quiere deducir, que puede ser simple o compuesta, sea el consecuente del principio lógico. Si se logra probar de cualquier manera que el antecedente del principio es una proposición verdadera, entonces el consecuente tendrá que ser necesariamente verdadero, pues se trata de una implicación que, por ser principio, es siempre verdadera. De esta manera hemos procedido en todos nuestros análisis de las diversas deducciones. La deducción ha consistido siempre en derivar la verdad de un consecuente de la verdad de un antecedente. Pero para que esto sea posible, es necesario probar de alguna manera la verdad del antecedente. La manera como se prueba la verdad del antecedente varía, pero es siempre de dos tipos: o bien es una prueba empírica, basada en la ob-

Formas de
probar la
verdad del
antecedente

servación de determinados hechos, o bien lógica y se basa nuevamente en una deducción. Así, en el primer ejemplo que dimos, aplicando el principio de contraposición a una deducción efectuada en una conversación de amigos, la prueba del antecedente fue empírica. Pero en todos los teoremas de matemáticas que hemos demostrado, la prueba del antecedente se ha basado en consideraciones puramente matemáticas, y, en consecuencia, ha debido ser una prueba lógica, efectuada por un proceso de deducción, pues hemos visto repetidas veces que en matemáticas no interviene otro tipo de prueba que la deducción.

Y en relación a esta prueba, hemos observado que, desgraciadamente, rara vez puede efectuarse mediante un principio lógico de forma coligativa. O sea, que para probar la verdad de los antecedentes, en matemáticas, casi siempre es necesario efectuar una deducción que se basa en principios lógicos de tipo diferente. Estos principios son estudiados por un capítulo completamente diferente de la lógica, que estudia lo que hemos llamado, en el capítulo III y en el VII, proposiciones predicativas y proposiciones relacionales. Y por eso se denominan *principios predicativos o relacionales*.

En el capítulo III, al estudiar las diferentes clases de proposiciones, hemos visto que las proposiciones simples se dividen en proposiciones predicativas y proposiciones relacionales. Estas proposiciones pueden combinarse, naturalmente, por medio de conjunciones y construirse a base de ellas, proposiciones coligativas. Pero lo que interesa señalar ahora es que, en el caso de los principios coligativos, la deducción del consecuente partiendo del antecedente, se hace sin conocer la estructura de las proposiciones componentes simples. Y para que esto sea posible es menester que en el antecedente c

en el consecuente, o en ambos, exista por lo menos una proposición compuesta. En cambio, cuando se emplean principios predicativos o relacionales es posible pasar de un antecedente simple a un consecuente simple. Pero para eso es imprescindible conocer la estructura de las proposiciones simples que intervienen en el proceso deductivo. Esto es completamente imposible en el caso de los principios coligativos. No hay ningún principio lógico coligativo que contenga sólo dos proposiciones simples. Los principios coligativos que hemos empleado en los análisis del Capítulo anterior son todos implicativos¹. Y en todos ellos hemos encontrado, como componentes, proposiciones compuestas. Un principio lógico no puede nunca tener la forma " $p \rightarrow q$ " en que las variables " p " y " q " representen proposiciones simples. Porque " p " y " q " pueden ser cualesquier proposición, y de la verdad de " p " no tiene porqué seguirse necesariamente la verdad de " q ". Lo importante del principio de forma implicativa es que, si se demuestra la verdad del antecedente, la verdad del consecuente queda demostrada de manera necesaria e inevitable. Pero esto sólo puede suceder si hay alguna relación estructural entre ambos. Si en una implicación sólo se sabe que el antecedente es " p " y el consecuente " q ", no puede deducirse la verdad de " q " de la verdad de " p ". Sólo se puede saber que si " p " y " q " son verdaderos, entonces la implicación es verdadera, que si " p " es verdadero y " q " falso, entonces la implicación es falsa, etc. Pero en el principio, las cosas son muy distintas, porque se trata de implicaciones que son siempre verdaderas, por eso, si se sabe que el antecedente es verdadero, el consecuente tiene que ser necesariamente verdadero. En la implicación corriente, hay paso de la verdad o falsedad de los com-

1 Hemos visto que todo principio lógico puede reducirse a uno implicativo.

ponentes a la verdad o falsedad de la implicación; en los principios implicativos, hay paso de la verdad del antecedente a la verdad del consecuente. Esta es la característica esencial de los principios coligativos. Y esto es lo que hace posible que se pueda pasar de los antecedentes a los consecuentes sin que sea necesario conocer cuál es la estructura de las proposiciones presentadas por las variables. Por eso la inferencia coligativa posee una enorme generalidad, porque las variables proposicionales representan cualquier proposición, y las aplicaciones de los principios coligativos a la deducción, se aplican universalmente a todas las proposiciones posibles. Pero por eso también la inferencia coligativa tiene un límite y no puede dar cuenta de todos los procesos de inferencia que realiza la mente humana; porque hay procesos de inferencia que se basan en las relaciones estructurales de las proposiciones simples, es decir, de las proposiciones predicativas y relacionales. Estos procesos sólo pueden desarrollarse si se conoce la estructura o forma de las proposiciones representadas por las variables.

Así, en la inferencia:

“Si todos los hombres son mortales, entonces algunos hombres son mortales”, se pasa de la verdad del antecedente a la verdad del consecuente, mediante una relación estructural entre ellos. Pero lo interesante es que no se trata de antecedentes y consecuentes que a su vez son proposiciones coligativas, sino que se trata de proposiciones predicativas, es decir, simples. Ya hemos visto, en el Capítulo III cuál es la relación estructural entre las dos proposiciones que integran el proceso deductivo. Si reemplazamos al sujeto “hombres” por la variable “S” y al predicado “mortales” por la variable “P”, y damos forma implicativa a la proposición, se puede ver con claridad la relación estructural:

“Todos los S son P $\rightarrow$ Algunos S son P”

Esta proposición es un principio lógico, pues tiene la propiedad fundamental de todo principio. Es una proposición siempre verdadera, cuya verdad no depende de la verdad o falsedad de sus proposiciones componentes. Es, además, como los principios que se aplican en los procesos de inferencia, de forma implicativa. Y por tener estos caracteres, es evidente que si el antecedente es verdadero, el consecuente tendrá necesariamente que ser verdadero. Pero se diferencia de manera fundamental de los principios coligativos: *sus proposiciones componentes son simples y tienen una estructura conocida*. Si en lugar de proposiciones de estructura conocida, tuviéramos variables coligativas, el principio se reduciría a “ $p \rightarrow q$ ” y no podría hacerse nada con él, pues no podría saberse si “ q ” puede o no deducirse de “ p ”. Pero el principio analizado tiene como antecedente una proposición predicativa universal y como consecuente una proposición predicativa particular, y además existe una relación muy determinada entre ambas: ambas tienen el mismo predicado y el mismo sujeto. Debido a que esta relación existe es que se puede pasar, de manera necesaria y universal, de la verdad del antecedente a la verdad del consecuente.

En el caso del silogismo, sucede exactamente lo mismo. Consideremos, por ejemplo, el silogismo: “Si todos los hombres son mortales y todos los griegos son hombres, entonces, todos los griegos son mortales”. Demos forma coligativa a la expresión:

“Todos los hombres son mortales $\wedge$ todos los griegos son hombres $\rightarrow$ todos los griegos son mortales”.

Reemplacemos ahora los sujetos y los predicados

por variables. Debemos recordar, al hacer esto, que los mismos términos deben siempre ser reemplazados por las mismas variables. Tenemos:

‘Todos los S son P $\wedge$ todos los P son T. $\rightarrow$. Todos los S son T’¹.

Y tenemos un nuevo principio lógico predicativo más complicado que el anterior, que se denomina, desde la época de los griegos: principio silogístico. Es claro que si en lugar de las proposiciones predicativas, pònemos variables proposicionales, no podemos hacer ninguna deducción con ellas, pues tendríamos:

$$p \wedge q \rightarrow r$$

“p”, “q” y “r” representan cualquier proposición, y en consecuencia pueden ser proposiciones sin ninguna relación entre sus sujetos y sus predicados. Por eso es imposible deducir la verdad de “r” de la verdad de “p” y de “q”. Pero cuando se conocen sus relaciones estructurales, en el caso de que sean como lo indica el principio del silogismo, de la verdad de las dos premisas, se deduce, de manera necesaria, la verdad de la conclusión.

§ 29. *Diversos tipos de clases.* Hay dos capítulos muy importantes de la lógica que permiten comprender la inferencia predicativo o relacional: la teoría de las clases y la teoría de las relaciones o de los predicados. Ambas teorías son lógicamente equivalentes y se emplean de acuerdo a las conveniencias del análisis.

Desgraciadamente, los principios de inferencia que se expresan por medio de la teoría de las clases o de las

1 La puntuación en el símbolo de implicación, indica que se trata de una proposición implicativa, cuyo antecedente es una proposición conjuntiva.

relaciones son bastante complicados (en algunos casos muy complicados), mucho más complicados que los coligativos. Y por eso no es posible estudiarlos en detalle en este libro. Pero podemos presentar los rudimentos de ambas teorías, cuyo conocimiento facilite estudios posteriores. Comenzamos con la teoría de las clases, por ser la más fácil, por lo menos en su nivel elemental.

Ya hemos visto en el Capítulo III lo que es una clase, conjunto o extensión. Todo término independiente designa un determinado conjunto de objetos, que se denomina su clase o extensión. Como es dable suponer, el número de objetos o elementos que pertenecen a las clases o extensiones, varía según los términos correspondientes. Ciertos términos tienen extensiones más bien pequeñas, pero otros tienen extensiones inmensas. Así, el término "rinoceronte" tiene una extensión muy pequeña porque en la actualidad existen pocos rinocerontes en el mundo. Pero el término "hormiga" tiene una extensión inmensa porque hay millones y millones de hormigas. Hay términos que tienen una extensión infinita, mayor que cualquier otra, como por ejemplo el término "objeto". Como cualquier cosa puede ser un objeto, la extensión del término "objeto" abarca todas las cosas posibles. Las palabras "objeto", "cosa", "ente", designan lo mismo, es decir, tienen la misma extensión o clase: todo lo que existe en el universo. La clase constituida por todos los objetos del universo, se llama *clase universal*¹. En cambio hay términos que no tienen extensión, porque no designan ningún objeto existente. Por ejemplo, la palabra "centauro" no tiene extensión, porque no existe ningún centauro. Sólo existe la idea del centauro, pero el centauro no existe porque es un ente mitológico. Como veremos pronto, es muy conveniente para el análisis lógico,

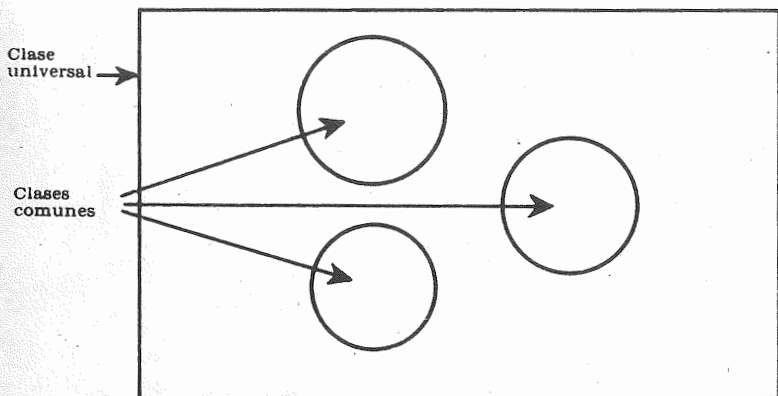
clase como la
extensión de
un término

1 Estas consideraciones sobre la clase universal no son completamente rigurosas, pero están justificadas pedagógicamente.

generalizar el concepto de clase y atribuir extensiones o clases a los términos que no la tienen. Se dice, entonces, que dichos términos tienen extensión nula o *clase nula*.

Vemos así que hay dos clases excepcionales, diferentes de las clases comunes, que se denominan *clase universal* y *clase nula*. La clase universal es la clase que abarca todos los objetos posibles, y la clase nula es la clase que no tiene ningún objeto. Ambas clases pueden ser determinadas por muchos términos diferentes, pero que designan siempre la misma cosa: o bien la totalidad de todos los objetos o bien ningún objeto.

Es costumbre establecida representar a la clase universal por un gran cuadrilátero, y colocar dentro de este cuadrado, las clases corrientes. La clase nula no puede representarse por medio de figuras, puesto que no existe.

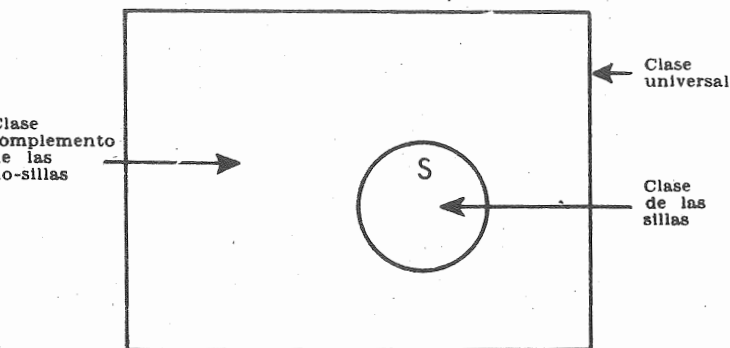


Además de la clase universal y de la clase nula existe otro tipo de clase que es de fundamental importancia:

la *clase complemento*. Si una clase corresponde a un término dado, su clase complemento corresponderá al término contradictorio. Por ejemplo, la clase de los leones corresponde al término "león". La clase complemento de dicha clase, será la que corresponda al término "no león". Por ejemplo la clase correspondiente al término "trasparente" será la clase integrada por todos los objetos transparentes. La clase complemento de la clase transparente será la clase correspondiente al término "opaco", es decir la clase formada por todos los objetos que *no son* transparentes. Es importante observar que la clase complemento es casi siempre inmensa, pues reúne a todos los objetos que *no son* tal cosa, que no pertenecen a determinada clase. Así, la clase de los objetos transparentes reúne a los objetos translúcidos, pero en cambio la clase de los objetos opacos, reúne a todos los objetos que no son translúcidos, sean cuales sean. En el lenguaje corriente hay muchos términos que indican clases complementarias, como "transparente", "opaco", "duro", "blando", "luz", "oscuridad", etc. Pero en general la mayoría de los términos no tienen términos contradictorios o complementarios. Así los términos "mesa", "perro", "azul", etc., indican determinadas clases, pero no hay palabras que designen las clases complementarias. Por eso, para obviar esta dificultad, se antepone la palabra "no" al término y se une con un guión. Así, la clase complemento de la clase de las mesas, estará designada por el término "no-mesa", la clase complemento de la clase de los perros, estarán indicada por el término "no-perro", etc.

Es evidente que si, dentro de la clase universal, una clase cualquiera se simboliza por un círculo, la clase complemento ocupará el resto del cuadrilátero. Si simbolizamos la clase de las sillas por la letra S, la clase complemento de las no-sillas, ocupará toda la parte del cua-

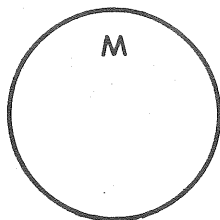
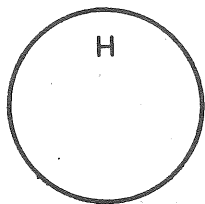
drilátero que no ocupa la clase S, porque contiene a todos los objetos. sean cuales sean, que no son sillas.



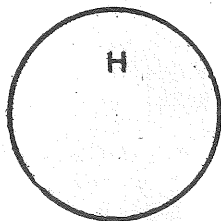
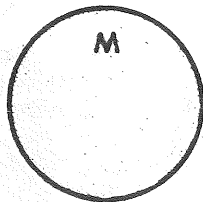
Hay pues tres tipos de clases: las clases *ordinarias* o *corrientes*, constituídas por conjuntos de diversos objetos existentes, la clase *universal*, constituída por todos los objetos existentes y la clase *nula*, que no contiene ningún objeto. Las clases ordinarias son muy numerosas, pues cada término que designa objetos reales tiene su clase correspondiente. En cambio sólo hay una clase universal y una clase nula.

§ 30. *Relaciones entre las clases.* En el Capítulo III hemos hablado ya de las relaciones entre las extensiones o clases de los términos. Hemos analizado tres de ellas: la inclusión, la exclusión y la intersección o interferencia. Además de éstas existe otra muy importante: la unión o suma de clases. La unión de dos clases es, simplemente, la clase formada por la suma de todos los miembros de ambas clases. Consideremos las clases co-

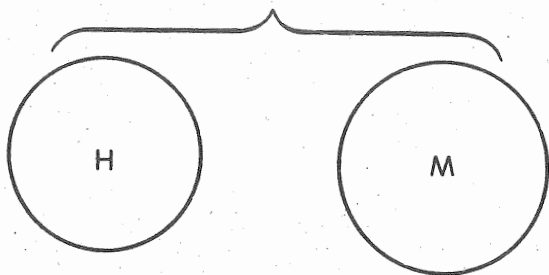
respondientes a los términos: "hombre" y "mujer". La suma de estas clases será la clase compuesta por todos los hombres y por todas las mujeres, es decir, será la clase correspondiente al término "humanidad". La suma de clases no puede representarse tan bien como la interferencia, la exclusión o la inclusión. Pero existe un método, que aunque no es muy comodo, permite indicar por medios geométricos cuando se han sumado dos clases: por medio de un rayado igual. Hemos visto que para indicar la interferencia entre dos clases, se raya la parte común a ambas. Pues bien, para indicar la suma de dos clases, se rayan de la misma manera ambas clases. Así, si designamos la clase de los hombres por la letra H y la clase de las mujeres por la letra M,



la clase de la humanidad, es decir de todos los hombres y mujeres existentes, será:



Existe también otro método, menos empleado, pero no menos eficiente, que consiste en indicar por medio de una llave que se han sumado las dos clases:



§ 31. *Expresión formalizada de las relaciones entre las clases.* Como la teoría de las clases sirve para estudiar determinado tipo de inferencia, su lenguaje debe ser formalizado. Así como en la teoría de las proposiciones coligativas se han empleado variables para designar a las proposiciones, así en la teoría de las clases se emplean también variables. Pero las variables, no designan en este caso, proposiciones, sino clases. Las variables simbolizan o representan a cualquier clase y pueden ser reemplazadas por cualquier clase, cualquiera que ella sea. No se trata pues de variables proposicionales, sino, perdonando el neologismo, de *variables clasiales*. Las letras que se emplean como variables son las primeras del alfabeto, "a", "b", "c", etc.

las variables
representan
clases o ex-
tensiones

Como sólo hay una clase universal y una clase nula, se emplean símbolos especiales para designarlas, símbolos, que como sólo significan eso y nada más, desempeñan la función de verdaderos nombres propios: la clase universal se designa por "I" y la clase nula por "O". La inclusión de clases se designa por el símbolo

">"

Así, la clase "a" incluye a la clase "b", se pone

$$a > b$$

En cambio si "a" está incluida en "b", se pone:

$$a < b$$

La interferencia de dos clases se designa de la misma manera que en el álgebra que hemos estudiado en Media. Así, si las clases "a" y "b", interfieren, se pone

$$a \times b$$

Y exactamente de la misma manera que en el álgebra, en la práctica se suprime el símbolo "x" y se escribe sencillamente:

$$a b$$

La suma o unión de clases se indica mediante el símbolo aritmético y algebraico de la suma. La suma de la clase "a" y de la clase "b", se indicará, por eso, así:

$$a + b$$

El complemento de una clase se indicará por medio de un guión. El complemento de la clase "a" se simbolizará como "—a", el complemento de la clase "b", como "—b", el de clase "c" como "—c", etc. Debe tenerse en cuenta que el signo — no significa aquí "menos" como en álgebra, sino sencillamente "complemento de".

Es muy interesante observar cómo la clase nula y las clases complementos son de extraordinaria eficacia para expresar, por medio de nuestro lenguaje formalizado, las más diversas relaciones entre las clases. Por ejemplo, si se quiere expresar que las clases "a" y "b"

se excluyen, es decir, que no tienen ningún elemento común, se pondrá:

$$ab = 0$$

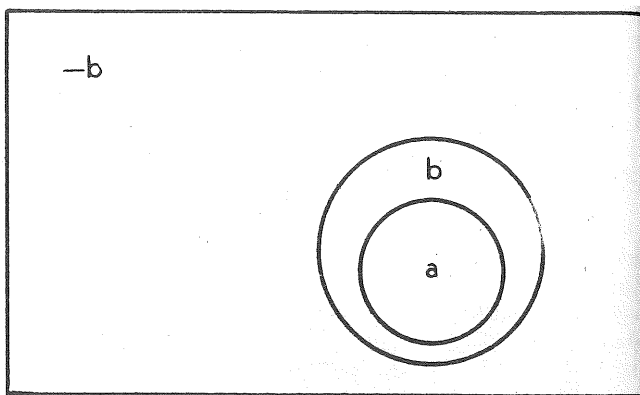
En efecto, si "a" y "b" no tienen elementos comunes, su interferencia no puede tener ningún miembro porque si lo tuviera, ambas clases tendrían por lo menos un elemento común y no se excluirían. Pero si la interferencia de "a" y "b" no tiene ningún elemento, entonces es una clase nula. Podemos poner por eso:

$$ab = 0$$

Si una clase "a", está incluida en otra "b" podemos poner:

$$a-b = 0$$

O sea, la interferencia de la clase "a" y de la clase complemento de "b" es nula. Un esquema nos ayudará a comprender esta formulación:



Vemos que, por hipótesis, la clase "a" está incluida en la clase "b", por eso el círculo "a" está dentro del círculo "b". La clase complemento de "b", es decir "—b", ocupa toda la parte del cuadrilátero que no ocupa "b", o sea toda la parte del cuadrilátero que queda fuera del círculo "b". Es evidente que la clase "a", que está dentro de "b" no tiene ningún miembro en común con la clase "—b", con la clase complemento de "b". Por eso "a" y "—b" se excluyen y se puede poner:

$$a - b = 0$$

En cambio, cuando dos clases ordinarias tienen miembros comunes, su interferencia no es nula, y se puede poner:

$$ab \neq 0$$

para indicar que la nueva clase formada por los elementos comunes a "a" y "b", es una clase ordinaria y que es diferente de la clase nula. Asimismo, cuando una clase "a" no está incluida en una clase "b", es evidente que tiene algunos miembros comunes con el complemento de "b", pues de otra manera, como acabamos de ver, estaría incluida en "b". Podemos poner por eso, en este caso:

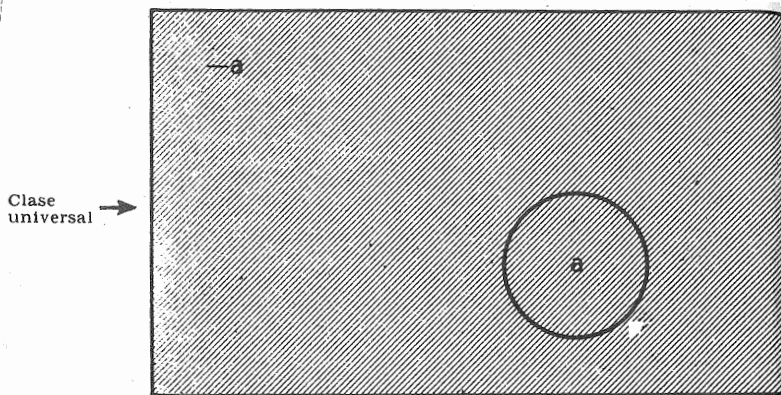
$$a - b \neq 0$$

Si se suman una clase y su complemento, el resultado será la clase universal. En efecto, designemos a la clase de las sillas por "a" y a la clase de las no-sillas por "—a". Es evidente que la clase de las sillas, más la clase de las no-sillas será una clase que contiene a todos los objetos, puesto que cualquier objeto, sea el que sea, es

una silla o no es una silla. Si es una silla, pertenece a la clase de las sillas, y si no es una silla pertenece a la clase de las no-sillas. Por eso podemos poner:

$$a + -a = 1$$

Esto puede verse con facilidad en la figura



Hemos dicho que para indicar la suma de dos clases, se rayan las dos de la misma manera. Vemos que si

rayamos de la misma manera la clase "a" y la clase "—a", tenemos que rayar todo el cuadrilátero, es decir la clase universal.

En cambio si se establece la interferencia de una clase con su complemento, la clase resultante será nula:

$$a - a = 0.$$

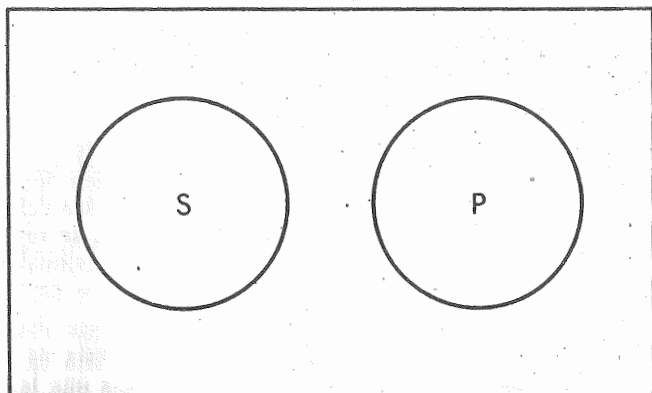
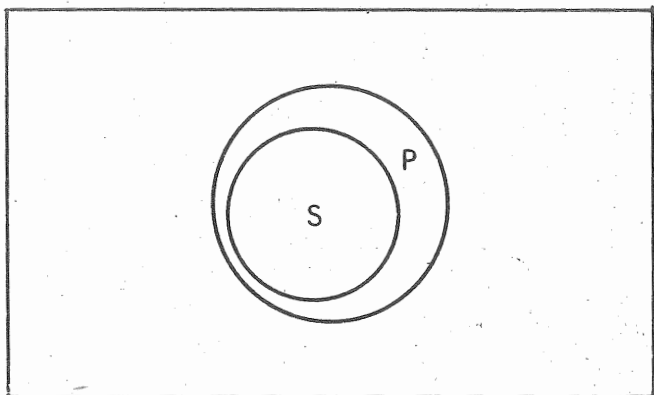
Esto es también evidente, pues una clase, por definición, no puede tener ningún miembro en común con su complemento.

§ 32. *Formalización de las proposiciones predicativas.* Después de los análisis que acabamos de efectuar, estamos ya en condiciones de formalizar las proposiciones predicativas. En el capítulo III vimos como la cantidad de las proposiciones se refería a las extensiones de los términos. Vimos también que las proposiciones negativas, enunciaban que un determinado predicado no se aplicaba a la extensión o clase del sujeto. Los conceptos sobre las clases, sus diversos tipos y sus diferentes relaciones permiten expresar lo anticipado en el capítulo III con depurado rigor.

Cuando la proposición predicativa es universal, hay referencia a la totalidad de los miembros de la clase del sujeto. Todos los miembros de la clase del sujeto, se relacionan con la clase del predicado. Pero esta totalidad tiene dos alternativas: o bien la clase del sujeto está incluida en la clase del predicado, o bien la clase del sujeto está excluida de la clase del predicado. Esta calidad de inclusión o de exclusión, es lo que hace que la proposición sea afirmativa o negativa.

Los gráficos siguientes indican claramente la uni-

versalidad y la cualidad afirmativa o negativa de las proposiciones,



En el primer caso *toda* la clase del sujeto queda dentro de la clase del predicado, en el segundo *toda* la cla-

se del sujeto queda fuera de la clase del predicado. O sea, en el primer caso, la clase del sujeto está incluida en la clase del predicado, y en el segundo caso está excluida. La universalidad de la proposición predicativa se refiere por eso a todos los miembros de la clase del sujeto. Cuando es afirmativa, todos los miembros de la clase del sujeto, pertenecen a la clase del predicado, o sea, hay relación de inclusión, y cuando es negativa, ningún miembro de la clase del sujeto pertenece a la clase del predicado, o sea, hay relación de exclusión.

Como hemos simbolizado a la clase del sujeto por "S" y a la clase del predicado por "P", podemos poner, de acuerdo con lo establecido en el párrafo anterior:

$$S-P = 0$$

Pero, naturalmente podemos simbolizar a la clase del sujeto por "a", y a la clase del predicado por "b", y poner:

$$a-b = 0$$

Aunque en los ejemplos concretos es cómodo simbolizar a la clase del sujeto por "S" y a la del predicado por "P", pues ambas letras son las iniciales de los términos "sujeto" y "predicado", es costumbre simbolizar a la clase del sujeto por "a" y a la clase del predicado por "b". Esto se debe a que la teoría general de las clases o extensiones, tal como la hemos estudiado inicialmente en los párrafos anteriores, emplea las primeras letras del alfabeto como variables de clases. Por eso de ahora en adelante emplearemos siempre a la variable "a" para denotar a la clase que corresponde al sujeto de la proposición predicativa y a la variable "b" para denotar a la clase que corresponde al predicado de la misma proposición. De acuerdo con lo dicho, la expresión:

$$a-b = 0$$

representa cualquier proposición predicativa universal y afirmativa, y la expresión:

$$ab = O$$

representa cualquier proposición predicativa universal negativa.

análisis de la
proposición
universal
afirmativa

Analicemos, por ejemplo, la proposición "Todos los hombres son mortales". Se trata de una proposición predicativa universal afirmativa. El sujeto es el término "hombre" que está tomado en plural y antecedido del término "todos" para indicar que se refiere a la totalidad de los miembros de su clase correspondiente, es decir, la clase de los hombres. El predicado es "mortal", que también está en plural porque las reglas de la concordancia así lo exigen. Si se simboliza la clase que corresponde al sujeto por "a" y la que corresponde al predicado por "b", tendremos: $a < b$. Y esto, puede presentarse como " $a \cdot b = O$ ", pues como ya hemos visto, cuando "a" está incluida en "b", no tiene ningún miembro en común con el complemento de "b".

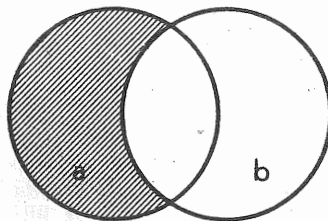
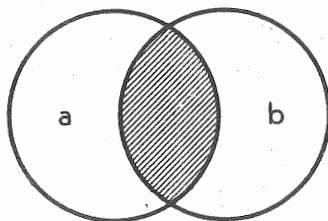
análisis de la
proposición
universal
negativa

Analicemos ahora la proposición "Ningún animal es racional". Una vez que decidimos simbolizar por "a" la clase del sujeto "animal" y por "b" la clase del predicado "racional", podemos poner: " $ab = O$ ", porque la proposición es universal y negativa y en consecuencia enuncia una exclusión total de las clases correspondientes.

análisis de la
proposición
particular

Las proposiciones particulares enuncian interferencias o exclusiones parciales entre las clases que corresponden a los sujetos y los predicados. Cuando son afirmativas enuncian que la clase del sujeto interfiere con la clase del predicado, y cuando son negativas enuncian que parte de la clase del sujeto queda fuera de la clase del predicado, lo que es equivalente a enunciar una exclusión parcial entre ambas clases. Como ambos casos suceder en la interferencia, es necesario emplear el método de

rayado para diferenciarlos. Cuando se enuncia una interferencia, se raya la parte común de ambas clases, y cuando se enuncia exclusión parcial, se raya la parte de la clase del sujeto que queda fuera de la clase del predicado. Asumiendo siempre que la clase del sujeto se simboliza por "a" y la del predicado por "b" tenemos:



Veamos un ejemplo. La proposición predicativa particular afirmativa: "Algunos estudiantes son diligentes" enuncia que parte de los miembros de la clase de los estudiantes, pertenecen a la clase de los diligentes. En cambio, la proposición "algunos estudiantes no son diligentes" indica que parte de la clase de los estudiantes, queda fuera de la clase de los diligentes. Simbólicamente, como hemos visto, el primer caso se representa como

$$ab \pm 0$$

y el segundo como:

$$a-b \pm 0$$

§ 33. *La inferencia predicativa.* Numerosas veces hemos dado ejemplos de inferencias en las que intervenían únicamente proposiciones predicativas. Nuestros ejemplos han sido de dos tipos: inferencia inmediata e inferencia mediata o silogismo. Una inferencia mediata es una deducción que contiene únicamente dos proposiciones simples. De la verdad del antecedente, que es una de ellas, se deduce, se deriva de manera necesaria, la verdad del consecuente. Sea la inferencia:

"Todos los hombres son mortales $\rightarrow$ algunos hombres son mortales"

Cuando formalizamos esta inferencia por medio de las relaciones de clase, capiamos de inmediato la estructura predicativa de ambas proposiciones expresada como relaciones entre determinadas clases. Y esto nos permite ver con claridad el fundamento de la deducción. En efecto, la primera proposición es universal afirmativa, y su fórmula es:

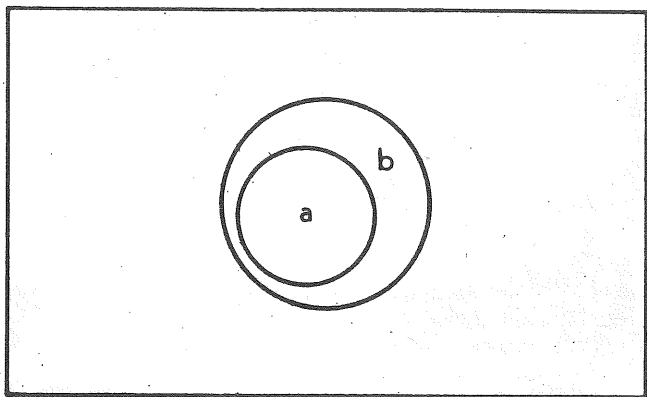
$$a-b=0$$

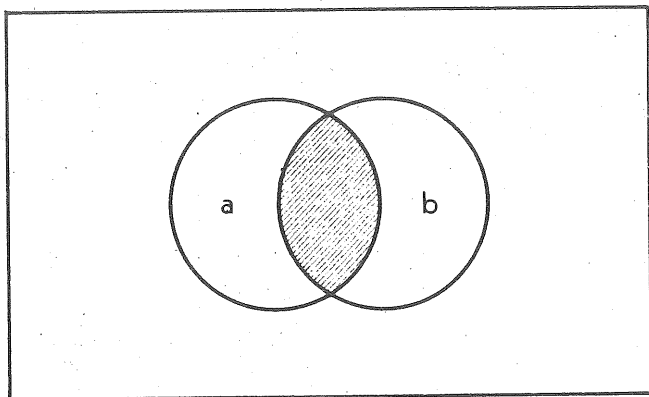
en que la variable "a" representa la clase del sujeto "hombre" y la variable "b" representa la clase del predicado "mortal". La segunda proposición es particular afirmativa, y tiene el mismo sujeto y el mismo predicado que la primera, en consecuencia su fórmula será:

$$ab \pm 0$$

Como las relaciones entre las clases pueden expresarse por medio de figuras geométricas, y a cada fórmula corresponde una figura, y naturalmente, a cada figura, una fórmula, podemos pasar siempre de las fórmulas a las figuras y representar cualquier proposición predicativa por medio de relaciones entre círculos. Esta representación geométrica nos permite captar con extraordinaria precisión el fundamento de la inferencia analizada. la inferencia inmediata

Así, las figuras geométricas que corresponden a las dos fórmulas, son:





De acuerdo con la primera figura, toda la clase del sujeto está contenida en la clase del predicado. De acuerdo con la segunda figura, parte de la clase del sujeto está contenida en la clase del predicado. Pero debe observarse que en este caso, la proposición particular nada nos dice sobre la parte restante. En efecto, la proposición particular: "Algunos hombres son mortales" nos dice que parte de la clase del sujeto pertenece a la clase del predicado. Pero no nos dice nada más. No nos dice que la otra parte queda fuera de la clase del predicado, ni nos dice tampoco que queda adentro. Por eso, si la clase del sujeto queda completamente dentro de la clase del predicado, es evidente que cualquiera de sus partes quedará también adentro. Y en consecuencia, si la proposición universal es verdadera, la proposición particular que tenga el mismo sujeto y el mismo predicado tendrá también que serlo.

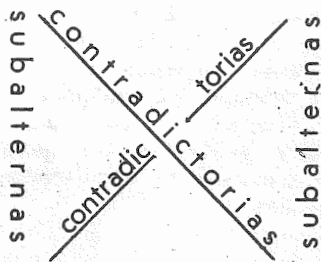
Las mismas consideraciones valen en el caso de las proposiciones predicativas negativas. La proposición universal negativa, excluye totalmente la clase del sujeto de

la clase del predicado. Pero si la exclusión de clases es total, entonces es también parcial, porque, si toda una clase está excluida de otra, lo estarán también todas sus partes. Vemos así, cómo la expresión de las proposiciones predicativas por medio de relaciones entre las clases, y la versión de estas relaciones por medio de figuras geométricas, permite comprender los fundamentos de la inferencia inmediata predicativa.

A fines de la Edad Antigua, el filósofo Boecio estudió profundamente las leyes de la inferencia inmediata predicativa y logró sistematizarlas por medio de un cuadro, que ha sido muy famoso en épocas pasadas y que se denomina el *cuadro de Boecio*. Los métodos de formalización que hemos estudiado permiten comprender el fundamento último de este cuadro.

El cuadro permite indicar las posibles inferencias predicativas inmediatas que pueden efectuarse combinando todos los casos posibles entre la universalidad, la particularidad, la afirmación y la negación de las proposiciones. Expresando las proposiciones mediante símbolos de clase, se adquiere gran claridad y concisión.

$a - b = 0$ _ contrarias _ $ab = 0$



$ab \neq 0$ subcontrarias $a - b \neq 0$

Según Boecio, las inferencias entre las proposiciones que integran entre el cuadro se establecen como sigue: de la verdad de las universales se deriva la verdad de las particulares, de la verdad de la universal afirmativa, se deriva la falsedad de la universal negativa y de la particular negativa, de la verdad de la universal negativa se deduce la falsedad de la universal afirmativa y de la particular afirmativa. Entre las dos subcontrarias no puede establecerse ninguna relación de inferencia.

Empleando la implicación para formalizar la relación de inferencia, se ve de inmediato que los seis casos de inferencia que contiene el cuadro de Boecio son otros tantos principios lógicos, pues se trata de implicación de inferencia, se ve que los seis casos de inferencia que contiene el cuadro de Boecio son otros tantos principios lógicos, pues se trata de implicaciones necesariamente verdaderas.

$$(a \cdot b = 0) \rightarrow \sim (ab = 0)$$

$$(a \cdot b = 0 \rightarrow \sim (a \cdot b \neq 0)$$

$$(a \cdot b = 0) \rightarrow (ab \neq 0)$$

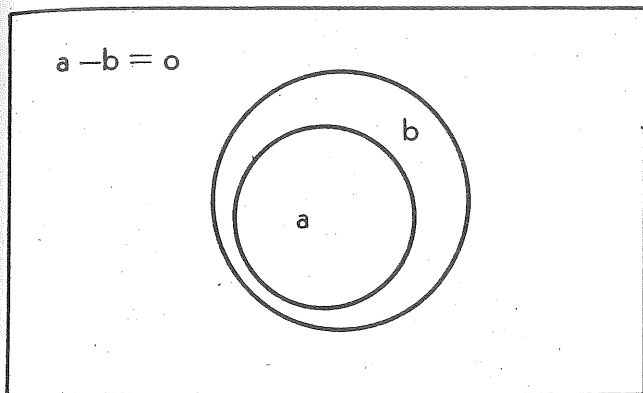
$$(ab = 0) \rightarrow (a \cdot b \neq 0)$$

$$(ab = 0) \rightarrow \sim (a \cdot b = 0)$$

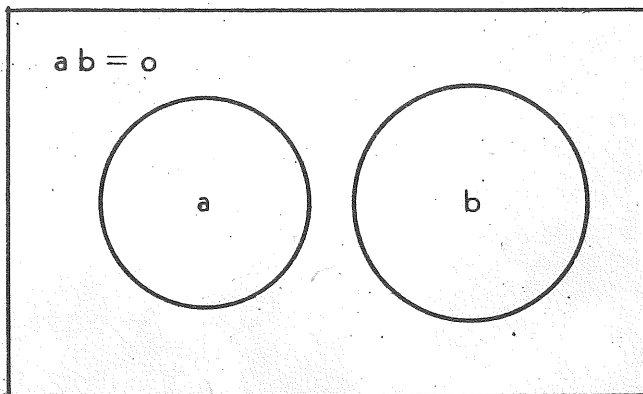
$$(ab = 0 \rightarrow \sim (ab \neq 0)$$

Traduciendo las fórmulas que expresan las relaciones entre las proposiciones al lenguaje geométrico se ven con evidencia las relaciones deductivas.

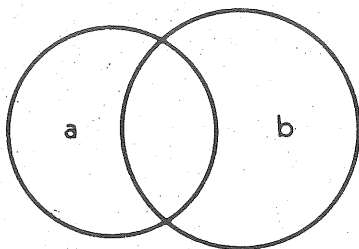
Así, la proposición universal afirmativa, se expresa:



Es evidente que si esta relación existe, entonces las relaciones:



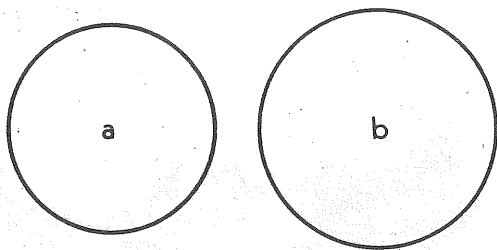
$$a - b \neq 0$$



serán falsas. Es decir, que si la universal afirmativa es verdadera, entonces, su contraria, la universal negativa, y su contradictoria, la particular negativa serán falsas, porque cuando un círculo está contenido en otro, no puede estar fuera de él ni total ni parcialmente.

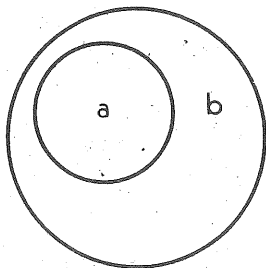
De la verdad de la proposición universal negativa, que se expresa como

$$a b = 0$$

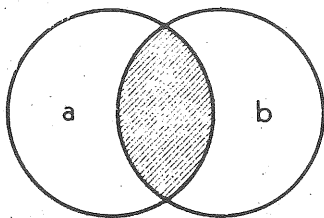


se desprende la falsedad de su contraria, la universal afirmativa y de su contradictoria la particular afirmativa, que se expresan en los siguientes grabados:

$$a - b = 0$$

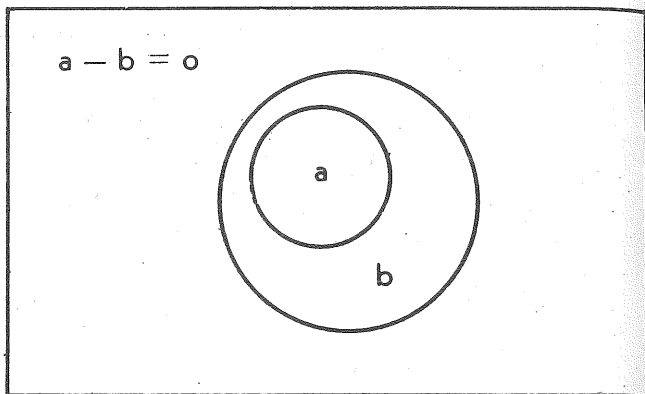


$$a \cdot b \neq 0$$



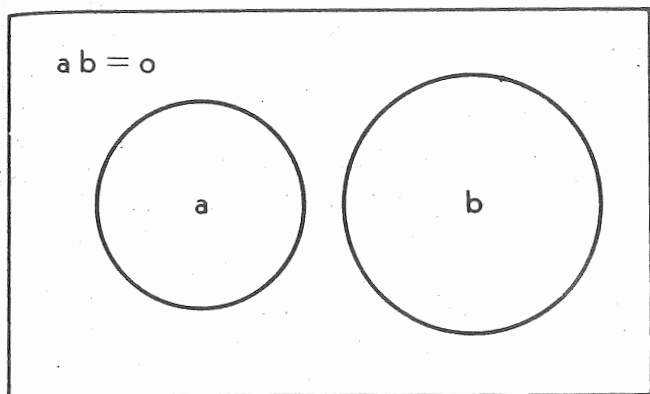
Las relaciones geométricas entre los círculos permiten ver que si los círculos *a* y *b* están completamente separados, uno no puede estar dentro del otro, ni siquiera cortarlo parcialmente.

El paso de la verdad de la universal a la particular, cuando se conserva la cualidad se denomina subalternación. La universal, es el antecedente y se denominan subalternante; la particular es el consecuente y se denomina subalterna. En el caso de la subalternación entre proposiciones afirmativas, se tiene que el antecedente es:



Y por eso es verdad el consecuente, porque ya hemos visto que la fórmula: " $ab \pm 0$ " expresa únicamente que las clases "*a*" y "*b*" tienen algo de común. En consecuencia, si "*a*" está incluida en "*b*" quiere decir que todos sus miembros son miembros de "*b*", y natural-

mente "a" tiene algo de común con "b". Cuando el antecedente es universal negativo, tenemos:



Entonces la particular negativa tiene también que ser verdadera, porque " $a-b=0$ " significa que parte de "a" queda fuera de "b" y si toda "a" queda fuera de "b" necesariamente debe quedar también fuera cualquiera de sus partes.

Queda ahora por considerar los casos en que no puede establecerse ninguna inferencia. No puede establecerse inferencia entre las subcontrarias, es decir, entre las dos particulares. Y tampoco puede establecerse inferencia tomando a la subalterna como antecedente y a la subalternante como consecuente. Si el lector ha seguido con cuidado la explicación, podrá demostrar fácilmente estas imposibilidades por medio de las figuras geométricas.

Consideremos ahora un ejemplo concreto. Sea la proposición: "Todos los hombres son racionales". Aplicados los principios lógicos enunciados, tenemos:

De la verdad de "Todos los hombres son racionales", se deriva la falsedad de "Ningún hombre es racional" y "algunos hombres no son racionales"; de la verdad de "Ningún hombre es racional" se deriva la falsedad de "Todos los hombres son racionales" y "Algunos hombres son racionales"; de la verdad de "Todos los hombres son racionales", se deriva la verdad de "algunos hombres son racionales"; y por último de la verdad de "Ningún hombre es racional", se deriva la verdad de "Algunos hombres no son racionales".

Resta sólo aclarar el sentido de las expresiones "contradictoria" y "contraria". Debemos distinguir cuidadosamente entre ambas contraposiciones de proposiciones. Las proposiciones contradictorias, cuando son predicativas, tienen siempre cantidad diferente, mientras que las contrarias tienen la misma cantidad. Esto se debe a que la contradictoria de una proposición, es única y exclusivamente su negación, es decir, la afirmación de que es falsa. Si representamos una proposición cualquiera por la variable " p ", su contradictoria será su negación, es decir " $\sim p$ ", o lo que es lo mismo, la afirmación de que " p " es falsa. Por eso la contradictoria de "Todos los hombres son mortales" tiene que ser "Algunos hombres no son mortales". En efecto, si negamos la proposición "Todos los hombres son mortales", tendremos la proposición "Todos los hombres no son mortales". Pero para que todos los hombres no sean mortales basta que algunos no lo sean. Por eso la proposición "Algunos hombres no son mortales" nos dice exactamente lo mismo que "Todos los hombres no son mortales" y es su contradictoria, porque es su mera negación. En cambio la proposición "Ningún hombre es mortal", niega demasia-

do, dice mucho más que la negación particular, pues excluye la posibilidad de que algún hombre sea mortal. Por eso Boecio llamó a esta proposición la contraria de la anterior y no la contradictoria.

§ 34. *El silogismo.* El silogismo es la inferencia que consiste en pasar de la verdad de dos proposiciones predicativas, llamadas *premisas*, a la verdad de otra proposición predicativa, llamada *conclusión*. Ha sido el tipo de inferencia más importante y popular que la lógica ha conocido en la época clásica. En nuestros días su popularidad ha sido eclipsada por el descubrimiento de nuevas formas de inferencia con aplicaciones mucho más interesantes y útiles, tanto en el conocimiento científico como en el filosófico.

Un ejemplo clásico de silogismo es:

“Todos los hombres son mortales”

“Todos los griegos son hombres”

luego

“Todos los griegos son mortales”

En tiempos pasados el silogismo era el único tipo de inferencia más o menos complicado que la lógica había podido descubrir y por eso existían largos estudios sobre sus diversas formas y variaciones. Se trataba de una teoría verdaderamente bizantina, que estudiaba una enorme cantidad de variantes que, desde el punto de vista de la deducción, no tenían mayor eficacia. Algunas de estas variantes, sometidas a los modernos métodos de análisis que brinda la actual lógica, han resultado falsas¹. La formalización del silogismo por medio de las relaciones de clase y de sus correspondientes figuras geo-

importancia
histórica del
silogismo

2 Como por ejemplo el modo Bamalip.

métricas, permite reducir todas las variantes de silogismo a sólo dos casos fundamentales: el caso en que las dos premisas son universales y el caso en que una de ellas es universal y la otra es particular. Como puede probarse, por medio de las figuras geométricas, es imposible que un silogismo tenga dos premisas particulares. Cada uno de los dos casos, presenta dos subcasos: cuando las dos premisas son afirmativas y cuando una de las premisas es negativa. Como se verá, también puede probarse que las dos premisas no pueden ser ambas negativas. En relación a las premisas negativas hay también dos variantes: cuando la negación es universal y cuando la negación es particular. En todo hay pues seis tipos fundamentales de silogismo.

tipos fundamen-
tales del
silogismo

El primer caso es cuando las dos premisas son universales afirmativas. En este caso la conclusión tiene que ser también universal y afirmativa. Analicemos el silogismo cuyas dos premisas son:

“Todos los hombres son mortales”

“Todos los griegos son hombres”

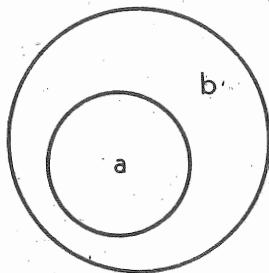
La primera se expresará, tal como lo hemos visto, por medio de “ $a-b=0$ ”. Para expresar la segunda proposición, hay que tener en cuenta que tiene un término común con la primera: el término “hombre”. En todo silogismo, las dos premisas deben tener un término común y nada más que uno. Si no se cumple esta condición, puede tratarse de una inferencia cualquiera, pero no de un silogismo. El término común a las dos premisas se llama *término medio*. Es también otro carácter esencial del silogismo que en la conclusión no interviene el término medio. Por eso, lo que hay que buscar, para llegar a la conclusión, es qué tipo de relación puede establecerse entre los dos términos de las premisas que no son término medio.

Como la segunda premisa tiene término medio, es decir, un término común con la primera premisa, al expresarla por medio de las clases, debe ponerse la misma variable que expresa el término medio en la primera premisa. El término medio de nuestras dos premisas es "hombre". "Hombre" es el sujeto de la primera premisa, es decir, es la clase representada por la variable "a". Pero "hombre" es el predicado en la segunda premisa. Debe pues entrar en esta proposición como segunda variable. El sujeto de la segunda premisa es el término "griego". Se trata de un término nuevo, que no interviene en la primera premisa. Por lo tanto, habrá que expresarlo con una variable diferente de las otras dos. Esta variable puede ser cualquier letra diferente de "a" y de "b". Todos los autores han convenido en usar la letra "c". En este caso, "c" denota al sujeto, y "a" al predicado. Pondremos entonces:

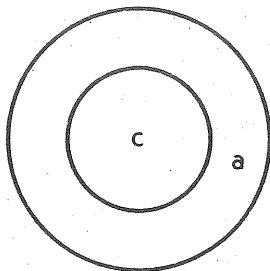
$$c-a=0$$

Una vez halladas las fórmulas de relaciones entre clases, se pasa a su interpretación geométrica. Y tenemos así, para cada una de las premisas:

$$a - b = 0$$



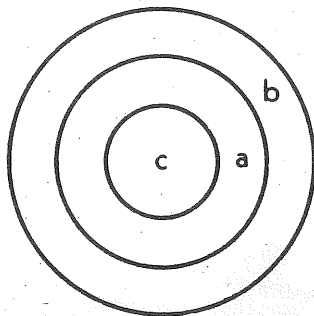
$$c - a = 0$$



De inmediato observamos que la primera proposición expresa que la clase "b" incluye a la clase "a" y que la segunda proposición expresa que la clase "a" incluye a la clase "c". En consecuencia, la clase "b" tiene que incluir a la clase "c". Esto puede indicarse poniendo en un solo grabado las dos relaciones:

$$a - b = 0$$

$$c - a = 0$$



En este grabado se ve gráficamente la relación que existe entre los dos términos de la conclusión. Se ve, con luminosa evidencia, que si el círculo a está contenido en el círculo b, y el círculo c está contenido en el a, el c tiene que estar contenido en el b. Esto nos da la solución buscada: si el círculo c está contenido en el círculo b, podemos poner:

$$c-b=0$$

Regresando de las clases a los términos, tenemos
 “Todos los griegos son mortales”

El presente ejemplo nos permite generalizar el método aplicado a todos los casos de silogismo. Para resolver un silogismo, deben expresarse las dos premisas por medio del lenguaje de las clases. Deben luego traducirse al lenguaje geométrico las relaciones entre clases que enuncian las premisas. Esta versión geométrica dará siempre como resultado una relación entre los círculos. La primera premisa estará expresada por una relación entre dos círculos y lo mismo la segunda premisa. Ambas relaciones tendrán un círculo común: el que simboliza la clase que corresponde al término medio. Observando la manera como se relacionan los dos círculos con el círculo común, puede conocerse la manera cómo se relacionan entre ellos. Y esta relación será la conclusión. Nos bastará pasar de la relación geométrica a la relación de clases y de la relación de clases a la relación de términos para obtener la conclusión buscada.

método general para resolver silogismos

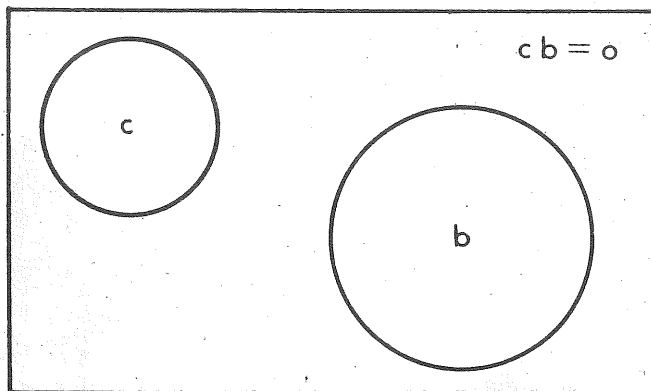
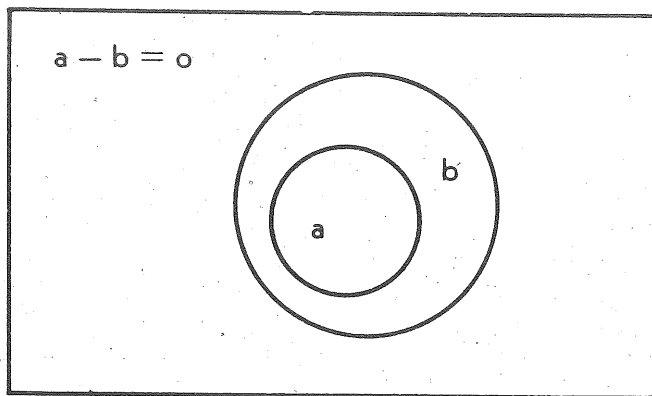
Veamos otro ejemplo:

“Todos los ingenieros son matemáticos”

“Ningún analfabeto es matemático”

La primera premisa nos da: “ $a-b=0$ ”, y la segunda premisa nos da: “ $cb=0$ ”. Obsérvese que este caso es diferente del anterior porque la segunda premisa es

negativa. Además, el término medio es predicado en ambos casos. Sus respectivas expresiones geométricas serán:



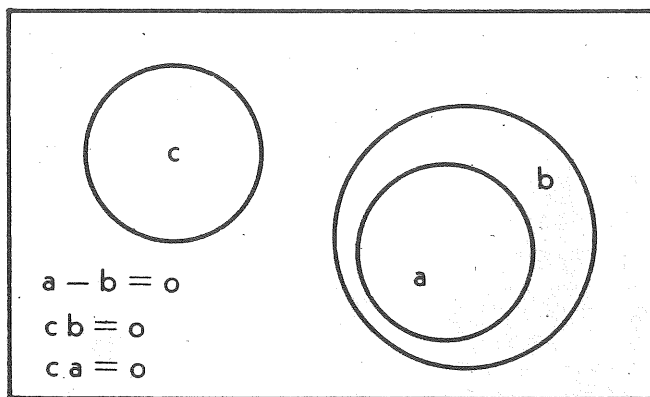
Vemos que, de acuerdo con la interpretación de la primera premisa, el círculo a está incluido en el círculo b. Y de acuerdo con su interpretación, la segunda pre-

misa nos dice que el círculo c está excluido del círculo b . En consecuencia, si el círculo a está incluido en el círculo b y el círculo c está excluido del b , el círculo c tendrá también que estar excluido del círculo a . Pero esto se expresa como sigue:

$$ca=0$$

Pasando de las clases a sus términos, tendremos que la conclusión es: "Ningún analfabeto es ingeniero". Como la relación de exclusión, a diferencia de la de inclusión, es recíproca, tendremos que si el círculo c está excluido de a , a estará también excluido de c , y podremos poner: "Ningún ingeniero es analfabeto". Lógicamente ambas proposiciones son equivalentes y pueden considerarse como la misma conclusión. Pero en la vieja teoría del silogismo se distinguían cuidadosamente ambos casos mediante complicadas reglas.

La solución se ve fácilmente cuando se expresa la relación de los tres círculos en un solo esquema.



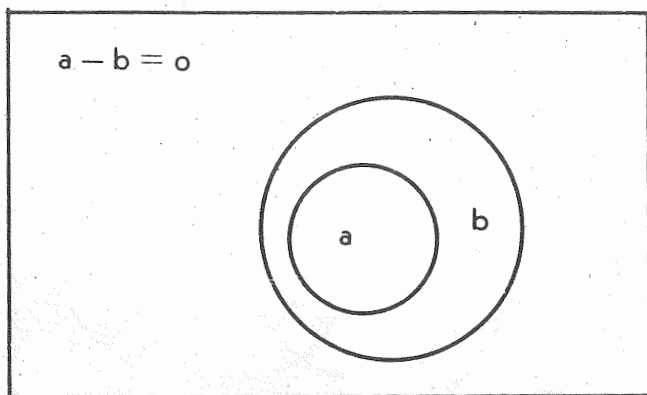
Se ve en el grabado cómo, si el círculo a está incluido en b y el círculo c está excluido de b , entonces el círculo c también debe estar excluido de a . Se ve también la equivalencia de la exclusión de a y de c , a saber, que es equivalente afirmar que c está excluido de a y que a está excluido de c .

Veamos ahora un último ejemplo de silogismo: cuando una premisa es universal afirmativa y la otra es particular afirmativa:

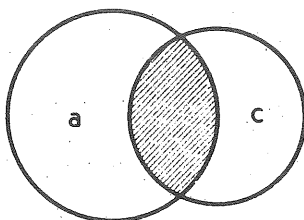
“Todos los ingenieros son matemáticos”

“Algunos ingenieros son electricistas”

La primera premisa se expresa como “ $a-b=0$ ” y la segunda como “ $ac \neq 0$ ”. Sus representaciones geométricas serán:



$$a \cap c \neq \emptyset$$

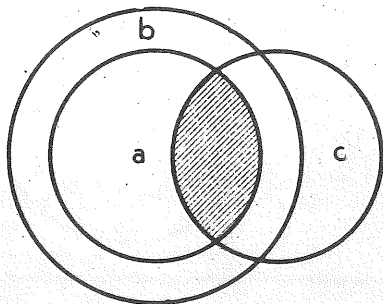


Se ve de inmediato que, si el círculo a está incluído en el b , y a tiene una región común con c (interfiere con c), los círculos b y c deben interferir necesariamente. La conclusión es por eso: "Algunos matemáticos son electricistas" o su equivalente: "Algunos electricistas son matemáticos". Esto queda claramente expuesto cuando se dibujan los tres círculos que corresponden a las respectivas clases:

$$a - b = \emptyset$$

$$a \cap c \neq \emptyset$$

$$b \cap c \neq \emptyset$$



Con las explicaciones y los análisis efectuados es posible resolver fácilmente todos los demás casos: cuando la primera premisa es universal afirmativa y la segunda es particular negativa, cuando la primera premisa es universal negativa y la segunda es universal afirmativa, etc., etc. Es también posible analizar los casos en que no puede establecerse inferencia alguna, como en el caso en que intervienen dos premisas negativas. Dejamos todos estos casos como fáciles ejercicios para el lector.

§ 35. *El cálculo de las clases.* Cuando en la inferencia predicativa intervienen solamente dos premisas y tres términos, las relaciones geométricas se ven con gran claridad. Pero cuando intervienen más de dos premisas y más de tres términos, aunque las fórmulas de clases son muy claras y fácilmente manejables, las relaciones geométricas se complican extraordinariamente. Por esta razón el método geométrico para estudiar la inferencia predicativa y encontrar la solución buscada sólo es útil para la inferencia inmediata y el silogismo. Desgraciadamente, la mayoría de las inferencias predicativas que se llevan a cabo tanto en la vida cotidiana como en la ciencia y en la filosofía, son mucho más complicadas que las que hemos estudiado. Por eso es necesario aplicar un método muy diferente, tanto para estudiar su estructura como para encontrar las soluciones cuando la complicación de las premisas no permite ver de inmediato la solución. Este método se denomina *cálculo de las clases*. El cálculo de las clases es una teoría matemática muy parecida al álgebra corriente que hemos estudiado en el colegio, pero con algunas diferencias: por ejemplo, no tiene exponentes. Como fue creada por Georges Boole, a quien hemos mencionado cuando hablamos de la historia de la lógica, se denomina también *álgebra*

booleana. Partiendo de las relaciones evidentes de inclusión e interferencia y del concepto de complemento, es posible desarrollar un álgebra que permite analizar la estructura de *cualquier inferencia predicativa por más complicada que sea* y que ofrece reglas para encontrar la conclusión de cualquier cantidad de premisas o antecedentes predicativos. Este cálculo se desarrolla mediante un depurado método matemático, es decir, partiendo de axiomas o postulados y deduciendo los teoremas. Para desarrollar los teoremas se emplean los principios de la lógica coligativa y algunas reglas especiales como la regla de sustitución.

El cálculo de las clases fue la primera conquista de la lógica moderna y lo que hizo posible el paso de la vieja e infecunda lógica, puramente intuitiva, a la lógica nueva, fecunda y rigurosa. Tiene por eso gran importancia y en la actualidad se utiliza en todos los estudios profundos de la inferencia y de sus aplicaciones a los diversos aspectos del conocimiento humano. Desgraciadamente, es demasiado complicado para estudiarlo en un curso escolar. Debemos dejarlo por eso para la universidad. Pero con lo estudiado, se ha recorrido ya parte del camino y se ha facilitado en mucho el estudio de aquellos que deseen avanzar más profundamente en el campo sin límites de la lógica moderna.

Ejercicios

- 1) Formalizar por medio del simbolismo de las clases, las siguientes proposiciones:
 - a) Todos los mamíferos son vertebrados.
 - b) Ningún reptil es molusco
 - c) Algunos colegiales son futbolistas
 - d) Ciertos hombres son misteriosos.
 - e) Ningún alemán es ocioso.
 - f) Algunos alemanes no son ociosos.
 - g) Todos los alemanes no son ociosos.

- 2) Por medio del simbolismo de las clases y de la representación geométrica decir si las siguientes proposiciones son o no son nequivalentes: (1)
 - a) Todos los hombres son mortales.
Ningún hombre es inmortal.
 - b) Todos los estegosaurios son escamados.
Es falso que algunos estegosaurios no sean escamados.
 - c) Ciertos abogados son matemáticos.
Ciertos matemáticos son abogados.
 - d) Ningún matemático es abogado.
No todo abogado es matemático.
 - e) No todos los ingenieros no son comerciantes.
Todos los comerciantes son ingenieros.
 - f) Todos los profesores son ilustrados.
Ningún no ilustrado es profesor.
 - g) Algunos profesores son claros.
Algunos profesores no son claros.

1 Dos proposiciones son equivalentes cuando tienen el mismo esquema geométrico.

3) Formalizar por medio del simbolismo de las clases y de la representación geométrica los siguientes silogismos, indicar si tienen o no tienen solución. Si tienen solución decir cuál es.

- a) Todos los peruanos son sudamericanos.
Ningún guatemalteco es sudamericano.
- b) Todos los mamíferos son vertebrados.
Algunos mamíferos son acuáticos.
- c) Todos los no fumadores son ahorradores.
Ningún vegetariano es fumador.
- d) Ningún cocodrilo es asiático.
Ningún asiático es europeo.
- e) Algunos no futbolistas no son nadadores.
Todos los nadadores son deportistas.
- f) Algunos no futbolistas no son resistentes.
Todos los deportistas son resistentes.
- g) Todos los no estudiosos son jugadores.
Ningún jugador es incorruptible.

Capítulo IX

LOGICA DE LOS PREDICADOS Y DE LAS RELACIONES

§ 36 *Clases, predicados y relaciones.* La formalización de las proposiciones predicativas por medio de las clases, y la interpretación geométrica de esta formalización, nos ha permitido analizar la estructura de la inferencia inmediata y silogística, realizada por medio de proposiciones predicativas. Al hacer dicho análisis, indicamos que la inferencia inmediata puede también efectuarse sobre la base de proposiciones relacionales. El silogismo, tal como se define clásicamente y tal como lo hemos analizado en el capítulo anterior, se constituye exclusivamente sobre la base de proposiciones predicativas. Pero nada impide realizar inferencias que contengan dos antecedentes, es decir, dos premisas, y una conclusión, cuya estructura sea similar a la del silogismo, pero cuyas proposiciones integrantes sean relacionales, en lugar de ser predicativas. Por ejemplo:

inferencia
mediata
relacional

Cinco es mayor que cuatro
Siete es mayor que cinco
luego
Siete es mayor que cuatro

Se trata de una inferencia mediata (puesto que tiene dos premisas en lugar de una sola) de estructura muy semejante al silogismo. Tiene, incluso, hasta término medio, que sirve para unir los dos términos que

se relacionan en la conclusión. Pero tiene radicales diferencias con el silogismo clásico. En primer lugar, las proposiciones que integran su estructura no son predicativas sino relacionales¹; y en segundo lugar, no existen proposiciones universales ni particulares, todas las proposiciones que intervienen en la deducción son individuales.

Es por eso necesario tener una noción clara de la inferencia realizada por medio de proposiciones relacionales, llamada *inferencia relacional*.

En el capítulo sobre las clases dijimos que la formalización por medio de las clases permite formalizar cualquier tipo de proposición simple, ya sea predicativa o relacional. Pero hicimos notar que la teoría de las clases se prestaba mejor para el estudio de la inferencia constituida sobre la base de proposiciones predicativas. En su aspecto elemental, que es el que necesitamos estudiar nosotros, la formalización de la inferencia relacional puede hacerse de manera más asequible y eficaz por medio de un simbolismo diferente del que emplea la teoría de las clases, y que se denomina *simbolismo funcional*. Por eso necesitamos iniciar el estudio de la inferencia relacional con algunas consideraciones sobre la formalización de las proposiciones relacionales.

simbolismo
funcional

§ 37. Formalización de las proposiciones simples. Las funciones lógicas.

Las proposiciones relacionales son de diversos tipos. Las más simples de todas son las proposiciones relacionales *diádicas*, es decir, aquellas que enuncian una relación entre dos objetos o elementos cualesquiera, como por ejemplo:

¹ Pronto veremos cómo esta diferencia no es fundamental para la teoría de la deducción.

“Juan ama a María”

“dos es mayor que tres”

“Luis es el padre de Enrique”, etc.

proposiciones
relacionales
diádicas

Lo primero que debemos hacer es determinar los elementos lógicos que integran la estructura de las proposiciones relacionales diádicas. Estos elementos no son sino tres: dos elementos que se relacionan y un elemento que los relaciona. O sea que en toda proposición relacional diádica hay siempre dos elementos relacionados y un elemento relacionante.

Una vez establecido que la estructura de las proposiciones relacionales diádicas no tiene sino tres elementos, es necesario determinar un simbolismo para expresar estos elementos. Para expresar las relaciones, la costumbre ya establecida es emplear las mayúsculas del alfabeto partiendo de “R” en adelante. Así, “R”, “S”, “T”, etc., simbolizan relaciones. Para expresar los elementos relacionados se emplean variables semejantes a las del álgebra, es decir: “x”, “y”, “z”, etc.

La estructura general de una proposición relacional diádica, se expresa, de acuerdo a las convenciones consideradas, mediante el simbolismo:

xRy

La variable “x” expresa el primer elemento relacionado, la variable “y” expresa el segundo elemento relacionado, y la variable “R” expresa el elemento relacionante o la relación. Se trata de un simbolismo absolutamente general, que permite simbolizar cualquier proposición relacional diádica. Así, si tomamos la proposición “Juan ama a María”, el término “Juan” está representado por “x”, el término “María” está representado por “y”, y la relación expresada por los términos “ama a” está expresada por “R”

Los símbolos "S", "T", etc., se utilizan cuando se quiere simbolizar dos o más proposiciones relacionales diferentes. Si se quiere simbolizar, por ejemplo:

"Juan ama a María y Pedro mira a María"

se empleará la expresión:

$$xRy \quad \bigwedge \quad ySz$$

La simbolización " xRy " " xSy ", etc., tiene la ventaja de que expresa la estructura de la proposición relacional de manera directa, es decir, de manera que coincide con la estructura del lenguaje natural. Pero tiene un grave inconveniente: no se presta para expresar cuantificaciones, es decir, para expresar proposiciones particulares y universales. La cuantificación es un procedimiento lógico de gran importancia que estudiaremos en la segunda parte del presente capítulo. Por eso los lógicos han llegado a la conclusión de que la simbolización más conveniente y eficaz es la que coloca el símbolo de la relación en primer término y el símbolo de los elementos relacionados después. O sea que en lugar de ponerse:

$$xRy$$

$$xSy,$$

se pone:

$$R(x,y)$$

$$S(x,y), \text{ etc.}$$

Este procedimiento desconcierta un poco a los principiantes, pero no debe olvidarse que se trata de un len-

guaje formalizado y que lo que interesa a los lenguajes formalizados es indicar las estructuras, es decir, las relaciones entre los elementos. Y hemos visto que la estructura o forma de las proposiciones se basa en el orden. Lo esencial en la proposición relacional no es que la relación vaya "entre" los elementos, porque el concepto de "entre" es un concepto espacial, y la proposición no es un objeto espacial sino un objeto lingüístico, cuya función es expresar significaciones. Lo esencial de la proposición relacional es que los elementos sean relacionados por la relación en un orden determinado, es decir, que uno vaya *antes* que el otro. Y esto se expresa de manera tan cabal con el simbolismo " $R(x,y)$ ", " $S(x,y)$ ", etc., como con el simbolismo " xRy ", " xSy ", etc.

Esta expresión de las proposiciones relacionales diádicas es lo que se denomina "simbolismo funcional". El simbolismo funcional es el simbolismo universalmente adoptado para expresar las proposiciones simples. Porque no sólo sirve para expresar las proposiciones relacionales diádicas, sino todas las proposiciones relacionales y también las predicativas. Cuando se trata de una proposición relacional que relaciona más de dos elementos, como tres, cuatro, etc., el simbolismo es exactamente el mismo: basta aumentar el número de las variables. Por ejemplo: las proposiciones "Lima está entre Trujillo y Arequipa", o "3 está entre 2 y 4", se expresarán como " $R(x,y,z)$ ", " $S(x,y,z)$ ", etc. Estas proposiciones son relacionales *triádicas* porque relacionan tres elementos. Las proposiciones relacionales *tetrádicas* relacionan cuatro elementos, y así sucesivamente. Las proposiciones relacionales que relacionan muchos elementos, se denominan relacionales *n-ádicas*, porque relacionan "*n*" elementos. El estudio de las proposiciones relacionales de más de dos elementos, es demasiado complicado para considerarlo en estas líneas.

Así como una relación entre dos elementos, se sim-

proposiciones
triádica, t
trádica y
n-ádica

simbolismo
funcional y
gramática

boliza funcionalmente como " $R(x,y)$ ", " $S(x,y)$ ", " $T(x,y)$ ", etc., así una proposición predicativa se simboliza funcionalmente por medio del simbolismo " $P(x)$ ", " $Q(x)$ ", etc. Las letras " P ", " Q ", " R ", simbolizan cualquier predicado, y la variable " x ", al igual que en el caso de las proposiciones relacionales, simboliza exclusivamente *términos individuales*.

El simbolismo funcional permite unificar la teoría de la inferencia realizada por medio de proposiciones simples, porque es posible descubrir, gracias a las fórmulas adoptadas, una serie de principios y de leyes generales que valen tanto para las proposiciones predicativas como relacionales. En muchos aspectos, el simbolismo adoptado muestra que las diferencias entre ambos tipos de proposiciones no son tan radicales y que ambos pertenecen a una misma especie lógica. Por eso ambos tipos de proposiciones, convenientemente simbolizadas por medio de las variables, reciben el nombre de *funciones lógicas*.

inferencia re-
lacional y
relaciones

§ 38. *La inferencia relacional.* Como hemos estudiado ya los principios elementales de la inferencia predicativa, nos limitaremos, en lo que sigue, al estudio exclusivo de la inferencia efectuada por medio de proposiciones relacionales. Esta inferencia, como hemos ya anticipado, tiene una enorme importancia porque es la que más se aplica en las ciencias matemáticas, y en consecuencia, en las demás ciencias que emplean las matemáticas.

El fundamento de la inferencia relacional es muy interesante y su análisis conduce a problemas filosóficos

1 Existen muchos tipos fundamentales de propiedades relacionales, como las propiedades tópicas, las propiedades coordinativas y las propiedades conjuntales. Pero las más importantes para nuestro estudio son las tópicas. En todo lo que sigue, al hablar de propiedades relacionales nos estaremos refiriendo a las propiedades tópicas.

de la más alta jerarquía. Bástenos decir que la inferencia relacional se funda en lo que modernamente se denomina propiedades *relacionales*¹. Existen muchas de estas propiedades, algunas de ellas extraordinariamente complejas. Pero las más importantes de todas, porque son las más generales, y porque permiten reducir gran parte de las demás combinaciones entre ellas, son tres: la reflexividad, la asimetría y la transitividad.

Se dice que una relación es *reflexiva* cuando puede aplicarse a un solo elemento. Así, la relación de igualdad es reflexiva, porque puede ponerse:

$$x=x$$

La relación de semejanza también es reflexiva, porque puede ponerse:

relación re-
flexiva

x es semejante a x

Evidentemente no todas las relaciones son reflexivas. Por ejemplo, la relación “mayor que” no es reflexiva, pues no puede decirse que x es mayor que sí misma. No puede ponerse:

$$x > x$$

O mejor, sí puede ponerse, pero entonces la proposición resultante será inevitablemente falsa, pues ningún objeto puede ser mayor que sí mismo.

En nuestro simbolismo funcional, la fórmula general de las relaciones reflexivas será:

$$R(x,x)$$

“R” representa cualquier relación, y “x” representa cualquier término individual. Por eso la fórmula

" $R(x,x)$ " simboliza cualquier proposición relacional en la que la relación " R ", se aplica a un solo término. Y naturalmente, la fórmula general de las relaciones que no son reflexivas, que se denominan relaciones "irreflexivas" será:

$$\sim R(x,x)$$

relación simétrica o conmutativa

Se dice que una relación es *simétrica* o *conmutativa* cuando puede cambiarse el orden de sus elementos relacionados, o sea cuando el primero puede transformarse en segundo y el segundo en primero. Así, las relaciones de igualdad, de paralelismo, y de fraternidad son simétricas, pues es evidente que si " x " es igual a " y ", entonces " y " es igual a " x ", que si " x " es paralela a " y " (tratándose de rectas o de rutas), entonces " y " es paralela a " x ", y que si " x " es hermano de " y ", entonces " y " tiene que ser hermano de " x ". Pero las relaciones de magnitud, de divisibilidad y de amistad no son simétricas, porque si " x " es mayor que " y ", " y " no puede ser de ninguna manera ser mayor que " x ", si " x " es divisible por " y ", no se sigue que " y " sea divisible por " x " (aunque en algunos casos pueda serlo) y si " x " es amigo de " y ", aunque " y " pueda corresponderle, en algunos casos, " y " puede ser enemigo de " x ". Es importante observar que cuando una relación es simétrica, la posibilidad de alterar el orden de los términos es universal e inevitable. O sea, de la existencia de la relación $R(x,y)$, se deriva necesariamente que también existe la relación $R(y,x)$. Por eso la fórmula de la simetría debe expresarse mediante una implicación. Si existe una relación simétrica $R(x,y)$, entonces debe existir una relación $R(y,x)$. O sea, si la proposición que expresa una relación simétrica " $R(x,y)$ " es verdadera, entonces, debe ser también verdadera la proposición

“ $R(y,x)$ ”: Por ejemplo, si la proposición “ x es igual a y ” es verdadera, entonces la proposición “ y es igual a x ” es necesariamente verdadera. Obsérvese que se trata aquí de un verdadero proceso de inferencia. Se trata de una inferencia inmediata, donde de la verdad del antecedente se deriva, de manera necesaria, la verdad del consecuente. Por eso, esta derivación puede expresarse como una implicación. O sea, “Si x es igual a y , entonces, y es igual a x ”. O, empleando el simbolismo de la lógica coligativa:

$$x \text{ es igual a } y \rightarrow y \text{ es igual a } x$$

Empleando además el simbolismo matemático ordinario, tenemos:

$$x=y \rightarrow y=x$$

Simbolizando a cualquier relación por el símbolo “ R ”, llegamos así a la fórmula general de las relaciones simétricas:

$$R(x,y) \rightarrow R(y,x)$$

Se dice que una relación es *transitiva* cuando puede establecerse un enlace entre dos de los elementos relacionados por intermedio de un tercero. Esta definición parece complicada, pero nuestro simbolismo permite expresarla de manera muy simple y precisa. Supongamos que una relación “ R ”, relacione a dos elementos “ x ” e “ y ”. Tenemos, entonces “ $R(x,y)$ ”. Supongamos además que relacione al segundo elemento “ y ”, con un tercer elemento “ z ”. Tenemos así: $R(y,z)$. Entonces, si la relación es transitiva, el elemento “ x ”, debe relacionarse necesariamente con el elemento “ z ”. Consideremos, por ejemplo, la relación de igualdad. Si “ x ” es igual a “ y ” e “ y ” es igual a “ z ”, entonces, necesariamente, “ x ” es igual a “ z ”. Esta relación transitiva es muy empleada en

relación
transitiva

matemáticas, pues no es otro que uno de los postulados de la geometría (que se aplica también a la aritmética y al álgebra) que hemos estudiado en los anteriores años de Media. Este postulado nos dice: dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí. En efecto, si dos cantidades, digamos las cantidades "x" y "z", son iguales a una tercera, digamos "y", tienen que ser iguales entre sí, porque tenemos que "x" es igual a "y", y que "y" es igual a "z". Luego "x" y "z" son iguales entre sí. Las relaciones de paralelismo, de divisibilidad, de fraternidad (de padre y madre), de magnitud, etc., son transitivas. En efecto, si "x" es paralela a "y", e "y" es paralela a "z", entonces "x" es paralela a "z"; si "x" es divisible por "y", e "y" lo es por "z", entonces "x" es divisible por "z"; si "x" es hermano (de padre y madre) de "y", e "y" es hermano (de los mismos padres) de "z", entonces "x" es hermano de "z"; si "x" es mayor que "y" e "y" es mayor que "z", entonces "x" es mayor que "z".

Para expresar la fórmula general de la transitividad se necesita una conjunción y una implicación. En efecto, en toda transitividad intervienen tres proposiciones: dos antecedentes y un consecuente. Los dos antecedentes son las proposiciones relacionales que relacionan, la primera "x" con "y", y la segunda "y" con "z". O sea serán las proposiciones " $R(x,y)$ " y " $R(y,z)$ ". Si estas dos proposiciones son verdaderas, entonces la proposición " $R(x,z)$ ", tendrá que ser necesariamente verdadera. Tendremos así que:

$$R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$$

No es difícil encontrar relaciones que no son transitivas. Por ejemplo, la relación de paternidad es necesariamente intransitiva, porque si "x" es padre de "y" e

“y” es padre de “z” entonces “x” no puede de ninguna manera ser padre de “z”, puesto que es su abuelo. La relación de amistad, tampoco es transitiva, porque aunque en ciertos casos lo es, en muchos casos no lo es, y para que una relación sea transitiva, o reflexiva, o simétrica, debe serlo, necesariamente, en todos los casos. Basta que falle en uno sólo, para que no pueda considerarse que tiene la propiedad. Así, si “x” es amigo de “y” e “y” es amigo de “z”, no se deriva necesariamente que “x” sea amigo de “z”. Puede ser que ni siquiera lo conozca. La relación de perpendicularidad es un caso interesante de intransitividad matemática. Si la recta “x” es perpendicular a la recta “y”, y la recta “y” es perpendicular a la recta “z”, “x” no puede ser perpendicular a “z”, porque ambas son necesariamente paralelas.

No necesita hacerse mayores análisis para mostrar que las propiedades relacionales constituyen el fundamento de la inferencia relacional. Toda inferencia relacional, es decir, toda derivación de la verdad de una proposición relacional partiendo de la verdad de otra u otras proposiciones relacionales se basa en la existencia de alguna propiedad relacional. La inferencia relacional es posible, porque cuando una proposición relacional es verdadera, la relación que relaciona sus elementos, tiene alguna propiedad, y esta propiedad permite afirmar que se pueden relacionar dichos elementos de una nueva manera. Veamos algunos ejemplos:

$$x=y \rightarrow y=x$$

x es primo de y $\rightarrow$ y es primo de x

$$x > y \rightarrow \sim (y > x)$$

x es pariente de y $\rightarrow$ y es pariente de x

En estas inferencias inmediatas, la verdad del consecuente se deriva de la verdad del antecedente de acuerdo con la condición de simetría o de asimetría de la relación que enuncia la proposición que funciona de antecedente. Así, la relación enunciada por los antecedentes de la primera, la segunda y la cuarta proposición es simétrica, por eso, basta invertir el orden de las variables para derivar un consecuente verdadero. Pero la relación enunciada por el antecedente de la tercera proposición es asimétrica, por eso el consecuente, en el que se ha alterado el orden de las variables, es falso.

Cuando una relación es asimétrica existe siempre otra relación correlativa que se llama la *conversa*. Así, la conversa de la relación ">" es "<" y viceversa, la conversa de la relación "padre de" es "hijo de" y viceversa, la de la "tío de" es "sobrino de" y viceversa, la de "a la izquierda de" es "a la derecha de" y viceversa. La conversa de una relación "R" se escribe " $\check{R}$ ". Es evidente que si una relación "R" es asimétrica, y una proposición " xRy " es verdadera, la proposición formada con la conversa " $\check{R}$ " y con un orden contrario de las variables, será también verdadera. La conversa introduce así una especie de simetría dentro de la asimetría. La fórmula general será:

$$xRy \rightarrow y\check{R}x$$

Interpretando a "R" y " $\check{R}$ " de acuerdo a los anteriores ejemplos, se tiene:

$$x > y \rightarrow y < x$$

x es padre de $y \rightarrow y$ es hijo de x

x está a la izquierda de $y \rightarrow y$ está a la derecha de x . etc.

Consideremos ahora algunos ejemplos basados en la transitividad:

$$x > y \wedge y > z \rightarrow x > z$$

x paralela a $y \wedge y$ paralela a $z \rightarrow x$ paralela a z

x es más estudioso que $y \wedge y$ es más estudioso que

$z \rightarrow x$ es más estudioso que z

x es factor de $y \wedge y$ es factor de $z \rightarrow x$ es factor de z

Como se ve, cuando una relación es transitiva permite efectuar una inferencia en la que el antecedente es una conjunción de proposiciones relacionales y el consecuente es una proposición relacional simple.

Cuando una relación además de ser transitiva es simétrica, permite realizar inferencias algo más complicadas e interesantes. Por ejemplo, la relación de igualdad puede dar lugar a la siguiente inferencia:

$$x = y \wedge y = z \rightarrow z = x$$

en que el consecuente en lugar de relacionar " x " con " y ", ha relacionado " y " con " x ". Cuando una relación tiene estas dos propiedades, es decir, cuando es a la vez simétrica y transitiva, puede efectuarse una inferencia del más alto valor: puede probarse que tiene que ser también reflexiva. En efecto, si una relación es simétrica, podemos poner " $R(x,y)$ " y " $R(y,x)$ " en el antecedente. o sea:

$$R(x,y) \wedge R(y,x)$$

Pero si "R" es transitiva, entonces, al unir "x" con "y" e "y" con "x", debe de unir también a "x" con "x" pues "y" ha servido de intermediario entre "x" y "x", así como sirve de intermediario entre "x" y "z", cuando la tercera variable es "z". Tenemos entonces:

$$R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow R(x,x)$$

Este pequeño ejemplo muestra la fecundidad extraordinaria de las proposiciones relacionales para el establecimiento de inferencias.

§ 39. *Cuantificación de las funciones lógicas - Cuantificación universal y existencial.* Supongamos que tenemos una función lógica de forma predicativa: "P(x)". Supongamos que el símbolo "P" se interprete como "peruano". Dicha función adquirirá entonces la siguiente forma:

"x es peruano"

Los valores de "x" serán todos los términos individuales que se refieren a los diversos individuos. Podrá decirse así: "Juan es peruano", "Carlos es peruano", "Napoleón es peruano", "Sócrates es peruano", etc., etc. Cuando el individuo designado por el término que funcione como sujeto, sea en realidad peruano, la proposición resultante será verdadera, pero en caso contrario será falsa. Así, si Juan y Carlos son peruanos, las proposiciones "Juan es peruano" y "Carlos es peruano", serán verdaderas. Pero si Napoleón es Napoleón Bonaparte, y Sócrates es el filósofo griego, las proposiciones "Napoleón es peruano" y "Sócrates es peruano", serán falsas.

Veamos ahora la función lógica

$$x=x$$

Es evidente que sea cual sea el valor de "x", la proposición resultante será verdadera, porque todo objeto es igual a sí mismo. Este caso es muy diferente del anterior, pues en el anterior, las proposiciones resultantes de reemplazar la variable "x" por los términos que representa, eran a veces verdaderas, a veces falsas, mientras que en el segundo caso todas las proposiciones resultantes son necesariamente verdaderas.

Basta este pequeño ejemplo para comprender que el hecho anotado tiene importancia capital para la teoría de la inferencia y que es preciso sistematizarlo para poder penetrar en los estratos más profundos de los procesos deductivos. El método para sistematizar estas dos alternativas de las funciones lógicas, a saber, que en unos casos cuando se reemplazan sus variables por sus valores se transforman siempre en proposiciones verdaderas, mientras que en otros casos se transforman a veces en proposiciones verdaderas y a veces en proposiciones falsas se denomina *cuantificación*. lo que es la
cuantificación

Para indicar que una función lógica de tipo predicativo, se transforma siempre en proposición verdadera cuando se reemplaza su variable "x" por cualquiera de sus valores, es decir, por cualquiera de los términos que representa, se utiliza la *cuantificación universal*. Para ello se pone la variable dentro de un paréntesis delante de la función lógica: cuantificación
universal

$$(x)P(x)$$

Esta expresión se lee: para todos los valores de "x", "P(x)" se transforma en una proposición verdadera. Co-

mo el enunciado de la cuantificación universal es algo largo, en la práctica se dice sencillamente: para todo “x”, “P(x)” es verdadera.

cuantificación
particular o
existencial

Para indicar que una función lógica de tipo predicativo, cuando se reemplaza su variable “x” por sus valores, se transforma a veces en una proposición verdadera y a veces en una proposición falsa, se utiliza la *cuantificación particular o existencial*, y se escribe:

$$(\exists x) P(x)$$

El símbolo “ $\exists$ ” es una “E” invertida. Se trata de un símbolo arbitrario, creado por Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, que se ha impuesto definitivamente y que es empleado por la gran mayoría de los autores. La expresión “ $\exists x) P(x)$ ” se lee: hay por lo menos un valor de la variable “x”, que transforma a la función “P(x)” en proposición verdadera. En la práctica se dice sencillamente “hay un “x”, tal que “P(x)” es verdadera”.

1 Todo lo dicho sobre la cuantificación en relación a las funciones lógicas de tipo predicativo se puede aplicar a las funciones lógicas de tipo relacional. Para ello hay que cuantificar las dos variables, lo que hace que se trate de situaciones mucho más complicadas.

Ejercicios

- 1) Clasificar las siguientes relaciones de acuerdo con las propiedades relacionales de reflexividad, simetría y transitividad.
 - a) Casarse.
 - b) Ver.
 - c) Inclusión de clase, o sea la relación a está incluida en b , o $a \subset b$.
 - d) Hermano de padre.
 - e) Hermano de madre.
 - f) Primo.
 - g) Abuelo.
 - h) Antecesor.
 - i) Heredero.
 - j) Divisible por.

- 2) Decir si las siguientes inferencias relacionales son correctas o incorrectas.
 - a) Si x es divisible por y , entonces y es divisible por x .
 - b) Si x es divisor de y , e y es divisor de z , entonces x es divisor de z .
 - c) Si Carlos es cuñado de José, y José sólo es hermano de María, entonces Carlos es esposo de María.
 - d) Si Anastasio es compadre de Tirifilo, Tirifilo es compadre de Anastasio.
 - e) Si A es paralela a B , B es paralela a C y C es perpendicular a D , A es perpendicular a D .
 - f) Si Juan es tío de María y María es tía de Juana, entonces Juan es tío abuelo de Juana.
 - g) Si Juan es tío paterno de María y María

es hermana de padre y madre de Esther, y Esther es madre de Violeta, entonces Juan es tío abuelo de Violeta.

- h) Si x está entre y y z , y u está entre x y z , y v está entre x y u , entonces, v está entre x y z (para resolver este ejercicio hay que formalizar una relación triádica del tipo de $R(x, q, z)$).
- i) Si A y B reparan a C y D , entonces C y D reparan a A y B (este ejercicio necesita una relación tetrádica del tipo de $R(x, q, z, u)$).
- j) Si a es mayor que b , y b es mayor que c y c es menor que d , y b es mayor que d , entonces, a es mayor que d .

- 3) Formalizar los ejercicios del número anterior, por medio del simbolismo coligativo y relacional. Cada relación de dos elementos será simbolizada como $R(x, q)$. Si en una misma proposición intervienen dos relaciones diferentes, la primera relación será $R(x, y)$ y la segunda $S(x, y)$. Si la segunda relación es conversa de $R(x, y)$, se pondrá $\bar{R}(x, q)$. Para orientar al lector mostraremos la manera de resolver el primer ejercicio:

x es divisible por $y = R(x, y)$. La inferencia, queda formalizada como sigue:

$$R(x, y) \rightarrow \bar{R}(y, x)$$

- 4) He aquí algunos problemas interesantes que se resuelven por medio de la inferencia relacional. Para llegar a la solución hay que pensar cuidadosamente, pues muchos de ellos parecen fáciles, pero sin embargo exigen un análisis

que en ciertos casos deben llegar a la sutileza. Se recomienda al estudiante tratar de resolver estos problemas en grupo, y acudir a la solución que indicamos al final del curso, sólo en último caso, para verificar el resultado hallado.

- a) ¿Quién es el padre del hijo de Zebedeo?
- b) ¿Quién es el hijo del padre de Zebedeo?
- c) ¿Quién es el padre del hijo del sobrino de Zebedeo?
- d) ¿Quién es el tío abuelo del sobrino del único hermano de Zebedeo.
- e) ¿Quién es el único sobrino del padre del primo hermano del hijo del padre de Zebedeo?

5) Decir cuáles son las inversas de las siguientes relaciones.

- a) Semejante.
- b) Perpendicular.
- c) Cruzado.
- d) Heredero.
- e) Más sabio.
- f) Mejor
- g) Al noroeste de.
- h) Tío-abuelo.
- i) Tataranieto.
- j) Consuegro.
- k) Logaritmo.

Tercera parte

LA LOGICA EN LA PRACTICA DEL PENSAMIENTO

Capítulo X

EL PENSAMIENTO CORRECTO

En los capítulos precedentes hemos estudiado los elementos fundamentales de la lógica formal, o sea, la teoría de la inferencia. Como tantas veces se ha dicho en el presente libro, la lógica es un instrumento indispensable del conocimiento humano, no sólo porque gracias a ella podemos alcanzar una enorme cantidad de verdades que la observación directa de los fenómenos no nos permite alcanzar, sino además porque las relaciones lógicas entre las proposiciones, es decir, el sistema de las formas lógicas, constituyen la estructura básica de todo conocimiento genuino. Esto, como se comprende fácilmente, es válido en especial para los tipos superiores de conocimiento, el científico y el filosófico; pero también lo es en medida considerable para el conocimiento espontáneo, ya que éste sólo puede alcanzar objetividad usando y respetando las leyes lógicas.

§ 40. *Pensamiento y situación vital.* Tal como funciona en la práctica, el pensamiento tiene siempre una finalidad. Pensamos, reflexionamos, discurremos, buscamos razones y sacamos conclusiones *para lograr determinados objetivos en una circunstancia dada.* Hay pues así una estrecha relación entre el pensamiento y la situación en

la situación
vital

que vive el sujeto pensante, *la situación vital*. Y es preciso tener muy en cuenta esto, porque en gran parte la corrección y la eficacia de nuestro pensamiento dependen de su adecuación a la situación vivida.

Las leyes lógicas son universalmente válidas, es decir, tienen una validez sin excepción. Pero ellas nos dan sólo una pauta, un cuadro abstracto dentro del cual el sujeto, en cada uno de sus actos de pensar, pone un contenido singular de ideas, relaciones, enjuiciamientos y opiniones. Y todo esto procede en gran parte de sus actitudes, conocimientos, intereses y finalidades, al mismo tiempo que de la circunstancia social, histórica y física en la cual está actuando. La corrección del conocimiento supone así, por un lado, el respeto de las relaciones lógicas universales, pero también, por otro lado, la consideración de los elementos personales y situacionales que operan en el uso del pensamiento.

la corrección
del lenguaje

Hemos dicho varias veces en este libro que el pensamiento y el lenguaje están íntimamente unidos. El lenguaje es como el soporte del pensamiento, ya que sin él el pensar no podría alcanzar permanencia y objetividad. Pues bien, estudiando el lenguaje se ve claramente la necesidad que tenemos de respetar las leyes lógicas y además de atender a la situación concreta en que las palabras son empleadas. El lenguaje, en efecto, cumple dos funciones: designar ciertas cosas y poner de manifiesto los estados psíquicos del sujeto que lo emplea. Hay entonces dos usos del lenguaje estrechamente unidos: 1) el uso *significativo*, gracias al cual las palabras sirven para designar cosas, propiedades, hechos, situaciones, y, por lo tanto, para comunicar todo esto a los demás sujetos; y 2) el uso *expresivo*, por el cual el sujeto —muchas veces sin proponérselo— pone de manifiesto lo que él está viviendo (sus percepciones, ideas, sentimientos, etc.).

Veamos esta diferencia a base de un ejemplo. Si una persona nos dice: "Juan es un malvado", nosotros, al oír esta proposición, podemos pensar dos cosas por lo menos, a saber: 1) que Juan se comporta de una manera negativa y tiene determinadas características que habitualmente sirven de base para llamar a una persona "malvado". Esto es lo que nuestro interlocutor *ha querido decir*; esto es lo que significan las palabras que ha empleado. Pero además podemos pensar otra cosa; 2) que la persona que nos está hablando siente animadversión por Juan, que no lo quiere, que le desagrada Juan, que piensa mal de él. Esto no nos lo ha dicho, pero sus palabras lo han expresado.

Ahora bien, el pensamiento de la persona que habla y nuestro pensamiento provocado por sus palabras será correcto en la medida en que respete las leyes lógicas, pero también en la medida en que se tenga en cuenta la situación vivida en la cual el lenguaje se emplea. Sin lo primero no habría posibilidad de conocer objetivamente nada. Si, por ejemplo, la persona que nos habla hubiera dicho: "Juan es malvado y no es malvado", usando las palabras en ambos casos con el mismo significado, habría incurrido en contradicción y su pensamiento sería nulo. Pero hay otras razones de incorrección que tienen que ver con la segunda condición que hemos señalado, la condición situacional del empleo del pensamiento y el lenguaje. En nuestro ejemplo hay elementos que nos hacen ver claramente este aspecto importantísimo de la cuestión. Por ejemplo, la frase que hemos considerado habla de Juan. Pero, ¿qué Juan es éste? Sabemos muy bien que hay innumerables Juanes. La corrección del pensamiento no puede lograrse sin precisar el sujeto de quien hablamos y esto sólo es posible teniendo en cuenta las circunstancias del lenguaje. Por otro lado, hemos visto que al decir "Juan es

un malvado", nuestro interlocutor no *dice* sino que *expresa* sus sentimientos contrarios a Juan. Nosotros podemos pues pensar en este sentido y sacar muchas conclusiones sobre el estado de ánimo de quien nos habla. Pero esto no puede hacerse de modo seguro sin considerar la total situación concreta del hablante. En efecto, si quien nos habla dice lo que dice riéndose o acompañando su afirmación con otras expresiones que muestran benevolencia, amistad, afecto hacia Juan o si es una persona —por ejemplo, su madre— de la que podemos estar ciertos que ama a Juan, las conclusiones que saquemos sobre sus sentimientos a base de esa sola frase serán equivocadas y nuestro pensamiento será incorrecto. Como vemos, esto habrá ocurrido por no tomar en cuenta el aspecto situacional, concreto, del pensar.

Así pues, el pensamiento correcto exige respetar la lógica y también atender a las circunstancias vitales de su funcionamiento. Y cumplir esta doble condición es tarea difícil y que exige gran cuidado y contracción.

§ 41. *Caracteres y obstáculos del pensamiento correcto.* Antes de proseguir con el examen de los modos y procedimientos del pensamiento aplicado a la práctica, conviene considerar los principales caracteres y obstáculos de la corrección intelectual. Por cierto que el objeto de esto no es hacer que el alumno los aprenda de memoria, pues con ello no habría ganado nada. Lo hacemos para llamar su atención sobre este aspecto tan importante del cultivo de su propio pensamiento.

En el parágrafo anterior hemos visto que la corrección intelectual depende en mucho de la lógica. Por la estricta aplicación de las normas formales de la lógica, nuestro pensamiento se hace riguroso, o sea, pierde el carácter informe y confuso de las vivencias no intelectuales y se adecúa a las exigencias legales de la razón.

El *rigor* es así una cualidad muy importante del pensamiento correcto. Con él se vincula estrechamente la *coherencia*, que igualmente sólo se logra respetando las leyes lógicas. En efecto, si nos apartamos de ellas caemos en contradicción con nosotros mismos y el conjunto de nuestros pensamientos no formará un todo armónico y homogéneo, sino un agregado de ideas o elementos conceptuales opuestos entre sí. Los lógicos califican de *inconsistente* este pensamiento que carece de coherencia.

Fácil es ver que el rigor y la coherencia piden *orden, sistema*, a nuestro pensamiento. La corrección intelectual depende, en mucho, de la manera cómo encadenamos unas ideas con otras, lo cual exige que los pasos de nuestro discurso sigan el orden lógico y que no se entremezclen y confundan las diferentes partes y elementos de la construcción mental. El orden y el sistema son pues también cualidades muy importantes del pensamiento correcto.

Pero así como son importantísimos estos caracteres del pensamiento que dependen de la lógica, así también son importantes los que tienen que ver con su uso concreto y situacional. La *claridad* y la *precisión* son dos de los principales. Sólo si logramos ser claros y precisos en nuestras ideas, si no nos dejamos seducir por la ambigüedad y confusión de los conceptos, podremos pensar correctamente. En caso contrario, tendremos sólo la ilusión de pensar. La concisión y la propiedad del lenguaje son en esto medidas muy seguras y deben ser usadas constantemente en la práctica intelectual. Cuando dudemos de si estamos pensando con claridad y precisión es conveniente preguntar qué quieren decir las palabras que estamos usando y tratar de fijar su sentido. Veremos entonces con cuánta frecuencia, tras las palabras se ocultaba la oscuridad y la confusión y hasta la vaciedad del pensamiento. El rigor lógico depende, en

gran parte, también de la claridad y precisión de nuestras ideas. Pero todos estos cuidados no deben llevarnos a adoptar un modo de pensar rígido, estático, un uso abstracto de las ideas, que las haría inadecuadas a las situaciones que vivimos y queremos entender. El *dinamismo*, la *flexibilidad* son por eso también cualidades muy necesarias y provechosas del pensamiento. Con ellas, finalmente, debemos mencionar el *justo criterio*, es decir, el *discernimiento* de lo que es verdadero y falso desde el punto de vista lógico y también desde el punto de vista de las circunstancias y condiciones personales del pensar. Debemos afinar nuestro sentido de la verdad, hacerlo agudo y sensible al mismo tiempo que racional, a fin de que nuestro pensamiento sea capaz de funcionar lógicamente, sin dejar perderse, por eso, todos los matices, las variedades, la riqueza de la realidad en la que estamos instalados y vivimos.

El olvido de las condiciones arriba señaladas crea obstáculos al pensamiento correcto. La negligencia de la lógica es uno de los principales. Pero también lo es el falso sentido de la lógica, su exageración —que puede llamarse *logicismo*—, el cual nos lleva a exigir exactitud, claridad o precisión allí donde no puede haberla y querer reducir todos los conceptos y las relaciones de ideas a las formas más abstractas del pensamiento matemático.

De otro lado, muchos de los más importantes obstáculos del pensamiento correcto surgen de la situación vital. Hemos dicho que hay que tenerla en cuenta para pensar correctamente. Esto es cierto; pero es cierto también que muchas veces somos esclavos de esa situación, lo cual nos conduce al error. La *precipitación*, el *apasionamiento*, el *interés absorbente*, y en general, los *afectos* son malos consejeros para pensar. Los *prejuicios*, las *ideas recibidas* y aceptadas sin *crítica*, los *hábitos* y cos-

tumbres son, asimismo, muchas veces obstáculos poderosos que impiden razonar correctamente. Y en el mundo moderno, con sus enormes desarrollos tecnológicos, la imposición de ideas y apreciaciones por la *propaganda* —que hoy actúa inclusive directamente sobre el subconsciente— es una valla que continuamente debemos salvar para pensar con corrección. De todo esto debemos estar advertidos si queremos conducir nuestra reflexión por el camino de la verdad; de todos estos factores negativos debemos depurar nuestra mente para pensar bien. Pero ello no es tarea fácil ni que se cumpla en un día; es una empresa que exige nuestra vigilancia y nuestra decisión de todos los momentos y a la que debemos dedicar nuestras mejores fuerzas intelectuales.

Capítulo XI

LA DEFINICION Y LA CLASIFICACION

§ 42 *La Definición.* Uno de los instrumentos más eficaces del pensamiento es la definición. Gracias a ella podemos llegar a formular de manera precisa y rigurosa los objetos que conocemos y a resumir y fijar las conclusiones de nuestro aprendizaje. La definición se usa de manera espontánea en el saber vulgar, es decir, en la práctica natural y cotidiana del conocimiento. Pese a que en ese caso no nos atenemos a los estrictos criterios del rigor y la exactitud, la definición presta muy grandes servicios a la precisión del pensamiento. Pero donde su importancia es mayor y su uso riguroso imprescindible, es en el conocimiento científico. Como sabemos, toda ciencia estudia las propiedades de algún conjunto de objetos¹. Toda ciencia tiene pues que empezar por distinguir el conjunto de objetos cuyas propiedades va a estudiar de otros conjuntos de objetos que no va a estudiar y que van a ser estudiados por otras ciencias. Para esto se vale de la definición. La definición es el punto de partida de la ciencia, es una orientación primaria de los conocimientos para que puedan ser aumentados sin confusiones y sin oscuridades.

La palabra "definición" se deriva del latín "*definitio*", que está compuesta de las palabras "*de*" que sig-

¹ Sobre la ciencia véase en el volumen de *Introducción a la Filosofía*, los capítulos I y III.

nifica lo mismo que en castellano y “*finitio*”, que significa límite, separación. “Definición” significa por lo tanto “separación de”. Y hemos visto en efecto que el conocimiento científico, para evitar confusiones, tiene que empezar por separar los objetos que va a estudiar de los objetos que no va a estudiar, es decir, que debe empezar por una definición de sus objetos.

Definir un objeto, quiere decir indicar los rasgos o las propiedades que lo distinguen de los demás objetos. Definir un grupo de objetos quiere decir indicar los rasgos o propiedades que lo distinguen de los demás grupos. Pero para saber en qué se distingue una cosa de las demás, es necesario saber cómo es esa cosa, pues si no se sabe cómo es, si no se conocen por lo menos algunas de sus propiedades, no se puede saber en qué se diferencia de las demás. Toda separación, toda distinción presupone un conocimiento. Por eso la definición al diferenciar, informa, brinda conocimiento, dice algo sobre la manera de ser de las cosas.

Podemos entonces decir que la definición es *una proposición que tiene por finalidad diferenciar una cosa de las otras, indicando determinadas propiedades de la misma*.

definición
verbal

Hay muchas clases de definiciones, pero aquí vamos a dedicar nuestra atención sólo a tres principales¹: la definición *verbal* o *formal*, la *genética* y la *esencial*.

La definición *verbal* se refiere al *significado* y *uso* de una palabra. Todas las palabras, como sabemos, tienen un significado; gracias a él las utilizamos para designar ciertas cosas, propiedades, situaciones u objetos. El significado que posee cada palabra es producto de una convención, es decir, de un acuerdo o costumbre

1) En sentido estricto, dos son los tipos fundamentales de definición: la explícita y la recursiva o constructiva. En este libro —por su carácter elemental— no podemos sin embargo tratarlas con el rigor que exigen.

existente entre las personas que usan determinado lenguaje. Así, la palabra castellana "mesa" sirve para designar un objeto que tiene tablero y patas, la palabra inglesa "table" sirve para designar el mismo objeto e igual cosa ocurre con la palabra alemana "Tisch". Por una convención que tiene vigencia entre los hombres que usan estos diferentes lenguajes, a las palabras mencionadas se les ha asignado el significado correspondiente. Ahora bien, *la proposición en la cual se establece qué significado se va a dar a cada palabra, es una definición verbal* (o formal). A esta clase pertenecen la mayor parte de las definiciones que figuran en los diccionarios, gracias a los cuales nos enteramos del significado con el cual se usan los vocablos. Por ejemplo, "*cursi*" es una persona de mal gusto; "*trascendente*" dicese de aquello que va más allá de la experiencia; "*mutable*" quiere decir sujeto a cambios. Cualquiera puede establecer arbitrariamente una definición verbal, en la medida en que quiera usar con un significado especial palabras de uso corriente o nuevas palabras. Esto es lo que hacen muchas veces los escolares cuando inventan un lenguaje secreto o emplean ciertas palabras con un sentido conocido sólo por un grupo. En la ciencia y la filosofía se emplea también con gran frecuencia la definición formal.

La segunda clase de definición es la *genética*¹. Ella se refiere a las cosas mismas y no a las palabras. Por eso se llama real. *Consiste en una proposición en que se formula el objeto estableciendo su modo de constitución o formación*. Por ejemplo: "cuadrilátero es la figura plana formada por cuatro rectas que se cortan". Este tipo de definición es muy usado en matemáticas. Y ello se comprende, pues las matemáticas no se ocupan de objetos que existen en la naturaleza, sino de idealidades.

definición
genética

¹ También se da a esta definición el nombre de constructiva.

Basta construir conceptualmente idealidades para que los objetos queden perfectamente formulados en sus caracteres. Pero también las definiciones genéticas pueden referirse a objetos del mundo físico. En efecto, si decimos que "el agua es el cuerpo líquido resultante de la unión de dos volúmenes de hidrógeno y uno de oxígeno" estamos haciendo una definición genética de un objeto natural.

definición
esencial

El tercer tipo de definición, que también es real o referente a las cosas, es la definición *esencial*. Ella *enuncia los caracteres o propiedades que deben estar presentes en un objeto y sin los cuales no sería tal objeto*. "El hombre es un animal racional" es una definición esencial, porque un hombre para ser hombre tiene que ser animal y tiene que ser racional. No hay hombre sin cuerpo ni hombre sin razón. Se dirá que el loco no tiene razón. Pero esto es un decir. El loco no tiene razón normal. Pero el loco piensa, el loco efectúa deducciones e inducciones. Las hace mal, las aplica sin tino, pero hay una enorme diferencia entre el loco y el animal. Asimismo, "La silla es un mueble que sirve para sentarse" es otra definición esencial. No hay silla que no sea mueble ni que no sirva para sentarse. Se puede argüir que una silla en miniatura no sirve para sentarse y es sin embargo silla. Pero es que una silla en miniatura no es una silla auténtica. Es la reproducción de una silla, es una obra de arte o un juguete. Decir que una silla en miniatura es una silla es como decir que la escultura de un hombre es un hombre.

género próximo
y diferencia
específica

La definición tiene género próximo y diferencia específica. Hemos visto que la finalidad de la definición es diferenciar a una cosa de otras. Pero para hacer esto tiene que decir algo sobre las propiedades de la cosa. La definición tiene pues que diferenciar a una cosa de otras por medio de sus propiedades. Y sólo hay

una manera de hacer esto: indicando propiedades comunes de esta cosa con otras e indicando además una propiedad que no sea común. Indicando la propiedad común se determina el grupo de cosas que se quiere diferenciar del objeto definido. Indicando la propiedad que no es común con aquellas cosas se logra diferenciarla por completo. *La propiedad común, que se enuncia en toda definición se llama género próximo. La propiedad que no es común con las cosas respecto de las cuales se quiere diferenciar al objeto definido se llama diferencia específica.* Así, en la definición "El hombre es un animal racional" el género próximo es *animal* y la diferencia específica es *racional*. La palabra "animal" indica el conjunto de cosas respecto del cual se quiere diferenciar al hombre. La palabra "racional" indica que aquello que separa al hombre de dicho conjunto, es decir, aquello que lo diferencia de todos los animales (porque no hay ningún animal que lo tenga) es la racionalidad. Asimismo en la definición "La silla es un mueble que sirve para sentarse", *mueble* es el género próximo y lo "*que sirve para sentarse*" es la diferencia específica. En la definición "Los cetáceos son mamíferos acuáticos" el género próximo es *mamífero* y la diferencia específica es *acuático*, etc.

La definición debe cumplir tres requisitos: lo definido no debe entrar en la definición, debe ser sencilla, requisitos de la definición debe ser clara. Es evidente que si lo definido entra en la definición no hemos definido nada. La definición tiene por finalidad diferenciar un objeto de otros. Si se diferencia a una cosa de otras, mediante ella misma, no se ha diferenciado nada.

Si se dice "El hombre es el hombre" no se ha dicho nada sobre el hombre. Si se dice "la silla es una silla" no se habrá dicho nada sobre la silla. Hay veces que lo definido entra en la definición en forma disimulada y

lo definido no
debe entrar
en la defini-
ción

difícil de comprobar. En estos casos es necesario analizar prolijamente la definición hasta encontrar el error. En filosofía se encuentra este error a menudo. Por ejemplo: definir al tiempo diciendo que "El tiempo es el orden de la sucesión" es hacer que lo definido entre en la definición, porque la sucesión no puede definirse sino con relación al tiempo. Se dice que una cosa sucede a otra cuando viene *después* de ella, es decir, en un tiempo posterior. Por eso, si queremos definir la sucesión tendremos que decir que "La sucesión es la diferencia de las cosas en el tiempo" Entonces decir: "El tiempo es el orden de la sucesión" es lo mismo que decir que "El tiempo es el orden de la diferencia de las cosas en el tiempo" Y estamos definiendo al tiempo con el tiempo.

sencillez

Que la definición deba ser sencilla significa que al lado del género próximo no se mencionen demasiadas diferencias específicas. Decir, por ejemplo: "El hombre es un animal que habla, que ríe, que estudia, que está parado en dos pies", es muy largo, no es necesario enunciar todas estas diferencias para diferenciar al hombre del animal. Basta decir "El hombre es un animal racional". La ciencia por lo general usa definiciones cortas y simples. Sólo cuando es inevitable emplea definiciones largas.

claridad

Que la definición deba ser clara significa que permite diferenciar fácilmente al objeto definido del grupo de objetos con respecto del cual se le quiere diferenciar. Decir por ejemplo que "Un número par es el que es divisible por dos", es una definición clara. No hay que confundir la oscuridad con la tecnicidad. Una definición es oscura cuando no cumple sus fines, es decir, cuando la diferencia que pretende establecer entre un objeto y otros, no está suficientemente indicada. Pero hay definiciones técnicas, que no pueden ser comprendidas por aquellos que no dominan el lenguaje y los conceptos fun

damentales de una ciencia. Estas definiciones pueden parecer oscuras a quienes no conocen las bases fundamentales de dicha ciencia. Y sin embargo, para quienes dominan su técnica son clarísimas. Por lo general, mientras más técnica es una definición, es más clara, pero es comprendida por una cantidad menor de gente, porque sólo aquellos que se dedican al estudio sistemático de determinada ciencia pueden captar su significado.

Por eso al hablar de la claridad de la definición hay que tomar algunas precauciones. No se puede decir que una definición no es clara cuando no se entiende. Una definición es oscura cuando quien está capacitado para entenderla, debido a su nivel mental, no la entiende con facilidad.

Antes de terminar, es conveniente señalar que hay ciertos objetos y propiedades que no pueden ser definidos. Son realidades últimas, que sirven de base a otras definiciones, y que por lo mismo no pueden ser formuladas en una definición. Sin ellos, no podríamos definir nada.

§ 43. *La división o clasificación.* La ciencia recurre a la definición para saber con claridad cuál es su punto de partida. Pero conforme avanza, adquiere nuevos conocimientos, y con el transcurso de los años, los conocimientos que se van incorporando a una ciencia son tan numerosos que es necesario tomar precauciones para no perderse en un laberinto de definiciones, de deducciones y de inducciones. Es necesario ordenar nuestro pensamiento para podernos orientar en el inagotable maremagnum de conocimientos que nos presenta su estudio. Esta ordenación del pensamiento, que permite al que estudia tener un hilo conductor para no perderse en una serie de conocimientos complicados es la *divi-*

sión. La división es la separación de los objetos por grupos según sus propiedades comunes.

Un ejemplo. Queremos estudiar las propiedades de los seres vivos. Pero estos seres son innumerables. No se pueden estudiar a ciegas. Es necesario, pues, estudiarlos poco a poco. El único medio que nos permite hacer esto es efectuar una división de los seres vivos. Para esto formamos dos grandes grupos: el grupo de los seres vivos que están compuestos de una sola célula y el grupo de los seres vivos que están compuestos por muchas células. Los primeros son los monozoarios y tienen todos una misma propiedad: están formados de una célula. Los segundos son los metazoarios y tienen todos una misma propiedad: están formados de muchas células. Como se ve, siempre que se divide un conjunto de objetos se forman grupos menores de objetos, cada uno de los cuales se caracteriza por una propiedad común a todos los objetos del grupo. Un grupo de objetos que tienen todos una propiedad común se llama *clase*. Por eso la división se denomina también *clasificación*.

Hay muchas especies de división. Las más usadas son la *división dicotómica*, la *politómica* y la *genérico-específica*. La división dicotómica consiste en separar los objetos que se va a dividir en dos clases. A una clase pertenecen todos los objetos que tienen determinada propiedad. A la otra clase pertenecen todos los objetos que no la tienen. Por ejemplo, vamos a dividir a todos los hombres en dos clases: los que hablan castellano y los que no lo hablan. Podemos dividir a todos los animales en dos clases: los que son mamíferos y los que no son mamíferos. Esta división fue muy empleada por el filósofo Platón, uno de los filósofos más grandes de todos los tiempos. Tiene la ventaja de ser muy sencilla y de reunir en sólo dos grupos a todos los objetos que se quiere estudiar. Pero tiene la desventaja de ser muy poco ana-

lítica y de incluir en un mismo grupo a objetos completamente distintos.

La división politómica es aquella que divide a los objetos que van a ser estudiados en varios grupos, cada uno de los cuales contiene a todos los objetos que tienen una propiedad común. Casi todas las ciencias dividen a su materia en forma politómica. Así la física se divide en mecánica, óptica, electricidad, termología, acústica y meteorología. La economía política se divide en teoría de la producción, circulación, distribución y consumo, etc.

división
politómica

La clasificación genérico-específica es más complicada que las anteriores. Es, en el fondo, una división politómica que se repite hasta llegar a grupos muy numerosos. La clasificación de la botánica y de la zoología, llamada clasificación de Linneo, es el ejemplo típico de clasificación genérico-específica. Separa primero a los individuos en reinos. Los reinos se dividen en ramas, las ramas en clases. Las clases se dividen en órdenes. Los órdenes se dividen en familias. Las familias en géneros, los géneros en especies y las especies en razas.

clasificación
genérico-
específica

Ejercicios**a) Definición**

1.—Ponga cinco ejemplos de definición verbal, cinco de constructiva y cinco de esencial.

2.—Diga a qué clase pertenecen las siguientes definiciones:

“Se entiende por “útil” a un objeto fabricado por el hombre”.

“El gato es un felino doméstico”.

“Los números enteros se obtienen adicionando la unidad a ella misma indefinidamente”.

“Cuatro es un número par”.

“Lima es: 1) un instrumento que se utiliza para pulir los cuerpos; 2) la Capital del Perú; 3) una fruta cítrica”.

“La motocicleta es un vehículo de dos ruedas con motor”.

“El color morado es el resultante de la composición del azul y el rojo”.

3.—Ponga un ejemplo de una discusión en la cual se confunda el desacuerdo sobre palabras con desacuerdo sobre hechos.

4.—Determine el género próximo y la diferencia específica de las siguientes definiciones:

“El hombre es un animal que se hace ilusiones”

“Un aviador es un piloto del aire”

“El círculo es una elipse cuya excentricidad es nula”

“La definición esencial es una proposición que determina las propiedades necesarias del objeto”

“El silogismo es un raciocinio deductivo mediato”

“La filosofía es un saber universal y trascendente”.

5.—Ponga tres ejemplos de objetos indefinibles.

b) **Clasificación**

1.—Ponga cinco ejemplos de división dicotómica, cinco de politómica y cinco de genérico-específica.

2.—Diga a qué tipo pertenecen las siguientes clasificaciones:

“Los animales se dividen en vertebrados e invertebrados”

“Las proposiciones se clasifican por su cantidad en: universales, particulares y singulares”

“Los barcos son a vela y remo o a motor”

“El Perú se divide en departamentos, provincias y distritos”

“Las definiciones pueden ser verbales, constructivas, esenciales, descriptivas, etc.”

“Los oficiales de ejército se clasifican en generales, coroneles, comandantes, mayores, capitanes, tenientes y subtenientes”.

Capítulo XII

LOS SOFISMAS O FALACIAS

§ 44. *Clasificación de las falacias.* De acuerdo con la tradición filosófica, pero en relación con nuestra perspectiva moderna, puede decirse que existen tres tipos fundamentales de falacias: *lógicas, semánticas y retóricas.* Las falacias lógicas son aquellas que se derivan del empleo inadecuado de los principios lógicos. Las falacias semánticas se derivan de una falsa interpretación de las proposiciones y de su relación con la verdad. Los sofismas retóricos son los errores que se infiltran en los procesos deductivos debido a trampas del lenguaje, a trucos de la persona que discute, la que, por medio de expresiones que se refieren a temas ajenos a la lógica, trata de hacer creer a sus oponentes intelectuales que ha realizado inferencias inobjectables o que ellos han cometido graves errores deductivos. Estos sofismas no son propiamente tema de la lógica, pero como atentan de manera indirecta contra la corrección del razonamiento, es conveniente conocerlos para combatirlos e impedir de esta manera que las personas sin ninguna capacidad lógica traten de convencernos con argumentos taimados y de hacerse pasar por lo que no son. El estudio de los sofismas retóricos que estuvo en boga durante la Edad Media e incluso en los primeros tiempos de la Edad Moderna, cayó en desuso con el advenimiento de la nueva lógica. Empero hoy día los lógicos están tomando nue-

vamente interés en ellos, pues los refinados métodos de análisis de que disponen permiten estudiar los sofismas retóricos de manera mucho más profunda y mostrar que en ellos hay mucho de interesante y valioso. El lógico belga Perelman ha iniciado una interesante vía de exploración en este campo.

as falacias
lógicas

as falacias
semánticas

Las falacias lógicas, o como también se les llama, deductivas, son aquellos errores que se derivan del mal empleo de los principios lógicos que permiten efectuar deducciones o inferencias. Son, a su vez, de dos clases: *sofismas coligativos* y *sofismas predicativos o relacionales*. Los primeros se derivan del mal uso de los principios lógicos coligativos y los segundos del mal uso de los principios lógicos predicativos o relacionales. Las falacias semánticas se dividen también en dos clases: *sofismas aléthicos* y *sofismas semióticos*. Los sofismas aléthicos son aquellos que se relacionan de una manera u otra con la verdad de las proposiciones que integran un razonamiento cualquiera; los sofismas semióticos se producen cuando el error consiste en una mala interpretación de la significación de los términos y de las proposiciones que constituyen el razonamiento. Tanto en el caso de los sofismas deductivos como en el de los semánticos, los sofismas pueden ser de dos tipos: sofismas contingentes y sofismas limitativos. Los contingentes son los que se derivan de un error en la aplicación de los principios, mientras que los limitativos son aquellos que se derivan de un error producido por tendencias innatas de la razón humana, que pueden ser superadas y controladas pero que tienden a imponerse de continuo y que en ciertos casos, no pueden ser eliminados por completo. Ya veremos cómo se presentan estos sofismas al estudiar el problema de las paradojas, y por eso no es necesario considerarlos en el presente Capítulo. Sólo estudiaremos, por eso, los sofismas contingentes.

§ 45. *Falacias deductivas.* Los sofismas deductivos contingentes son, como acabamos de ver, de dos clases: coligativos y predicativos o relacionales. Los coligativos consisten en hacer mal uso de los principios lógicos coligativos. Por ejemplo, si parto de las dos proposiciones verdaderas: “si x es un número par, entonces x divide a los múltiplos de 10” y “si x divide a los múltiplos de 10, entonces x divide a los múltiplos de 100”, y aplico el principio coligativo “ $p \rightarrow q, q \rightarrow r : \rightarrow p \rightarrow r$ ”, puedo realizar la inferencia correcta: “si x es un número par, entonces divide a los múltiplos de 100”. Pero puedo equivocarme y creer que la expresión “ $p \rightarrow q, q \rightarrow r : \rightarrow r \rightarrow p$ ” es un principio lógico. Si lo aplico llego a la conclusión errónea: “si x divide a un múltiplo de 100, entonces x es un número par”¹.

ejemplo de
falacia
coligativa

El ejemplo que hemos dado es muy simple y es fácil detectar el error. Pero cuando la proposición coligativa que se toma como principio es más complicada, entonces es mucho más difícil descubrir el detalle que conduce a la invalidez del razonamiento. Como el análisis de estos casos requiere cierta práctica, no es necesario hacerlo en esta ocasión. Por otra parte, por más complicada que sea la proposición coligativa que se toma como principio, la causa del error de inferencia es siempre el mismo, de manera que basta con el ejemplo analizado para tener una noción clara y definitiva de lo que es un sofisma coligativo.

Los sofismas predicativos o relacionales consisten en hacer mal uso de los principios predicativos o relacionales. Al estudiar la teoría de las clases y del silo-

¹ Se supone que el lector haya estudiado ya la lógica coligativa y haya hecho ejercicios de formalización, es decir que sepa pasar de las proposiciones enunciadas en el ejemplo a su forma coligativa.

gismo y al estudiar la lógica de los predicados, hemos visto que existe una enorme diversidad de principios, es decir, de proposiciones predicativas o relacionales, combinadas coligativamente, que son necesariamente verdaderas. Cuando estos principios se aplican mal, surgen los sofismas predicativos o relacionales.

En el caso de la inferencia inmediata o del silogismo, los sofismas se producirán cuando la estructura de estos tipos de inferencia no sea correcta, es decir, cuando sea alterada o cambiada de manera que la expresión resultante no sea ya una proposición lógica, una proposición cuya verdad es necesaria y no depende sino de su propia estructura. Así, sabemos que todo silogismo debe tener un término medio, un término que conecta a los otros términos de ambas premisas. Tomemos el ejemplo más sencillo: "Si todos los hombres son mortales y todos los griegos son hombres, entonces todos los griegos son mortales". Formalizando este silogismo por medio de la teoría de las clases, tenemos:

$$a-b=O$$

$$c-a=O$$

$$c-b=O$$

El término simbolizado por "a", es decir, el término "hombres" es el término medio, porque aparece una vez en cada premisa y desaparece en la conclusión. Pues bien, hay deducciones que tienen la apariencia del silogismo, pero que son inválidas porque carecen de término medio, como por ejemplo: "Si todas las aves son bípedos implumes y todos los hombres son bípedos implumes, entonces todos los hombres son aves". En apariencia este silogismo tiene término medio porque el término (compuesto) "bípedo implume" interviene una vez

en cada premisa, y no interviene en la conclusión. Pero esto no basta para que un término sea medio. Debe, además, conectar a los otros dos términos de manera definida. Y en este caso no hay ninguna conexión determinada. En efecto, formalizando nuestro silogismo, tenemos que las premisas son:

$$a-b=0$$

$$c-b=0$$

Si traducimos las expresiones de clase en lenguaje geométrico, vemos que lo único que expresan las premisas es que la clase "a" está incluida en la clase "b" y que la clase "c" también está incluida en la clase "b". Pero esto nada nos dice sobre la relación entre las clases "a" y "c", pues del hecho de que ambas estén incluidas en "b" no se deriva ninguna relación entre ellas, ya sea de inclusión, de exclusión o, simplemente de interferencia.

En cuanto a la inferencia relacional, es obvio que las falacias se producirán cuando las propiedades de las relaciones que sirven para constituir los principios deductivos, no correspondan a los hechos. Así, si se supone que la relación de perpendicularidad es transitiva, se puede efectuar la siguiente inferencia: "Si A es perpendicular a B y B es perpendicular a C, entonces A es perpendicular a C". Pero esta inferencia es falaz, porque la relación de perpendicularidad no es transitiva sino, precisamente lo contrario, intransitiva, pues si A es perpendicular a B y B es perpendicular a C, A y C tienen que ser necesariamente rectas paralelas.

ejemplo de
falacia
relacional

En los ejercicios que hemos elaborado en los capítulos sobre las clases y las relaciones, hemos incluido una serie de ejemplos de inferencias predicativas y relacionales falsas. Se trata de casos de falacias o sofis-

mas. Se recomienda efectuarlos con todo cuidado y compararlos con los casos en que los ejercicios conducen a inferencias verdaderas para, de esta manera, adquirir la mayor práctica posible en la detección de las falacias o errores de inferencia.

Hay un tipo de falacia deductiva de gran importancia, tanto histórica como teórica: el círculo vicioso o dialélico. El círculo vicioso consiste en demostrar la verdad de una proposición por medio de otra, y luego demostrar la verdad de la segunda por medio de la verdad de la primera. De manera formalizada, el círculo vicioso es una inferencia de la siguiente estructura:

$$p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$$

Un ejemplo típico es la famosa prueba del quinto postulado de Euclides o postulado de las paralelas. Hasta el primer tercio del siglo pasado, muchos matemáticos consideraban que dicho postulado no era un verdadero postulado sino un teorema y querían probarlo. Muchos lograron deducirlo de los postulados restantes. Pero para hacer esto, tenían también que recurrir a algunos teoremas ya demostrados. Ahora bien, dichos teoremas no podían ser demostrados sin que se hiciera uso del quinto postulado de Euclides. Como las expresiones matemáticas son a veces tan complicadas, muchas veces una misma proposición matemática tiene diversas formas equivalentes. Esto es lo que sucedía con el quinto postulado de Euclides. Para demostrar este postulado, se partía de teoremas que se creía deducidos sólo de los postulados restantes, pero que en realidad presuponían el postulado que se quería demostrar. La dificultad estaba en que, cuando se empleaba para derivar los teoremas se empleaba una expresión del postulado que, en apariencia era muy diferente, pero que en realidad

la importante
falacia del
círculo
vicioso

decía la misma cosa. Si designamos por “p” los teoremas de los cuales se partía para demostrar el postulado de las paralelas y por “q” este postulado, tenemos que los matemáticos que creyeron haber probado el quinto postulado de Euclides procedían como sigue: de los teoremas deducían el postulado y del postulado los teoremas. O sea de “p” derivaban “q” y de “q” derivan “p”.

§ 46. *Falacias semánticas o materiales.* El estudio de las falacias semánticas o materiales es mucho más complicado que el de las falacias lógicas o puramente deductivas, pues presupone, además del conocimiento de la teoría de la deducción, el conocimiento de una nueva disciplina estrechamente relacionada con la lógica que se denomina *semántica*. La semántica consiste en el estudio riguroso de la relación de las proposiciones con los objetos y las situaciones que describen. Por eso la semántica incluye dos grandes capítulos: el estudio de la verdad y el estudio de la significación. Naturalmente ambos estudios requieren de métodos muy rigurosos, pues las situaciones analizadas son de extraordinaria complicación, mucho más grande a veces que las que estudia la teoría de la inferencia o deducción. Por eso la semántica usa un lenguaje formalizado, que incluye como una de sus partes al lenguaje formalizado de la lógica que hemos empleado en nuestro estudio. Este hecho hace totalmente imposible, en el nivel en que nos hemos situado, dar ejemplos importantes de falacias semánticas, tanto aléthicás como semióticas. Nos limitamos por eso, a hacer notar que la paradoja semántica que analizaremos en el Capítulo XIV es un ejemplo típico de falacia aléthica porque constituye un ejemplo de inferencia viciada por la concepción errónea de la verdad de una proposición. En cuanto a las falacias semióticas no

las falacias
aléthicás

falacias
semióticas

pueden comprenderse sin conocer algunas teorías muy complicadas como la *teoría de los tipos*, que trasciende el nivel elemental. En general, puede decirse que se comete una falacia semiótica cuando se aplica un predicado a sus sujetos de manera indiscriminada. Por ejemplo, un predicado que significa una propiedad que sólo poseen los objetos individuales, no debe enunciarse de objetos que no son individuales sino genéricos, porque entonces se produce un sinsentido. Así, el predicado "azul" debe enunciarse sólo de los objetos individuales. Puede decirse "El Nilo es azul", o "El jarrón es azul", pero no puede decirse "La raíz cuadrada de dos es azul". No tiene sentido decir esto porque el predicado azul no puede aplicarse a números.

falacia por
petición de
principio

Hemos dicho que es complicado dar ejemplos importantes de falacias semánticas, pero hay un tipo de falacia semántica, que aunque ahora ya casi nadie comete, y que no tiene por eso importancia, vale la pena analizar porque es bastante simple y porque en la antigüedad fue cometida por diversos filósofos: la *petición de principio*. La petición de principio consiste en presuponer la verdad de lo que se quiere demostrar. Es, por eso, una falacia aléthica, pues se basa en un procedimiento erróneo relacionado con la verdad de las proposiciones. Es una falacia de estructura muy simple que puede ser formalizada por medio de la lógica coligativa. Supongamos, que la proposición "p" implique a la proposición "q", que la proposición "q" implique a la proposición "r" y que la proposición "r" implique a la proposición "p". Es posible que estas relaciones de implicación no sean muy explícitas y que sea difícil descubrirlas. Después de un gran esfuerzo una persona logra probar estas implicaciones y las expresa de la siguiente manera:

$$p \rightarrow q \quad q \rightarrow r \quad r \rightarrow p$$

Como la prueba de las implicaciones puede a veces ser muy difícil y laboriosa, sucede que una persona que comenzó probando que " $p \rightarrow q$ ", al llegar a la prueba de que " $r \rightarrow p$ " puede dar un grito de júbilo y exclamar: logré probar la verdad de " p ". Pero al hacer esto comete una petición de principio, pues no recuerda que para probar la verdad de " p ", ha debido partir de " p ".

Un ejemplo clásico de falacia por petición de principio es la que cometió Aristóteles cuando quiso probar que el centro de la Tierra es el centro del mundo. Su argumentación fue la siguiente: "La naturaleza de las cosas pesadas es dirigirse al centro del mundo y la de las cosas ligeras alejarse de él. La experiencia muestra que las cosas pesadas se dirigen al centro de la Tierra y que las cosas ligeras se alejan de él. Luego el centro de la Tierra y el centro del mundo coinciden". Fácil es ver que, para sacar la conclusión, Aristóteles *ha supuesto* que el centro de la Tierra y el centro del mundo son lo mismo; pero *eso justamente era lo que había que probar*.

§ 47. *Falacias retóricas.* a) *Ignorancia del asunto (ignoratio elenchi)*. Consiste en probar lo que no está en discusión, o algo que no es el tema principal tratado. Con ello se busca desviar la atención del oponente y producir el efecto de que se ha probado la cuestión discutida. Por ejemplo, si se discutiera sobre la *posibilidad técnica actual* de construir cohetes interplanetarios en el Perú, habría que considerar especialmente las dificultades financieras, tecnológicas y materiales de este proyecto en un país pobre como el Perú. Si, en el debate, alguien argumentara así: "¿Por qué no va a poder fabricar nuestro país cohetes interplanetarios, cuando en esta tierra han nacido sabios ilustres que compiten con los mejores de cualquier parte y nuestra juventud está llena de talento y entusiasmo?", estaría cometiendo fa-

diversos tipos
de falacias
retóricas

lacia de ignorancia del asunto, porque lo que se discute no es el talento de los peruanos, sino la posibilidad práctica de fabricar hoy en nuestro país cohetes interplanetarios.

b) Muy semejantes a la anterior son otras falacias típicamente retóricas, como el *Argumentum ad verecundiam*, que consiste en tratar de persuadir a alguien apelando al respeto o la autoridad de una persona o institución (por ejemplo: "Nadie puede considerar equivocado lo que afirmo; una experiencia de treinta años respalda mi afirmación"); el *Argumentum ad populum*, que busca persuadir moviendo las pasiones, intereses o prejuicios de los oyentes (por ejemplo: "es extranjero, luego está bien fabricado"); el *Argumentum ad hominem*, que consiste en aducir como razón probante de la tesis que se discute algo concerniente sólo a la persona con la cual se discute (por ejemplo, señalando sus defectos o sus virtudes o dándole a entender que se beneficiará aceptando la tesis); y el *Argumentum ad ignorantiam*, por el cual se quiere probar una afirmación mostrando que la negación correspondiente no ha sido probada (por ejemplo: "La Atlántida existió, pues nadie ha demostrado que no existió").

c) *Falacia de accidente*. Consiste en tratar lo accidental como esencial y de este modo considerar que aquellas propiedades que se encuentran algunas veces en cosas o personas valen para todos los casos de esas cosas o personas. Ejemplo: "Belmonte, Domingo Ortega, Manolete, Dominguín, esos toreros y muchos otros, son españoles. Luego, los españoles son siempre toreros".

d) *Falsa causa (non causa pro causa)*. Consiste en considerar como causa de algo un hecho, lo que simplemente lo antecede o está relacionado con él. Esta es una falacia vinculada con muchas supersticiones y creencias

sin base racional. Por ejemplo, la que aconseja no pasar debajo de una escalera, seguramente porque este hecho estuvo vinculado fortuitamente alguna vez con una desgracia ocurrida a alguien; o la que recomienda tocar tres veces en madera, pensando que esta acción tiene como efecto prevenir las enfermedades (esta falacia estrictamente hablando es de inducción, pero como apela a factores emotivos es también retórica).

e) *Falacia de interrogación*. Consiste en reunir en una pregunta varias cuestiones diferentes y pretender que se conteste a todas con una sola respuesta. Por ejemplo: "¿Los abogados, los pintores y los músicos son artistas?". Si se responde sí, entonces resultan artistas los abogados; si se responde no, entonces se ha negado que los pintores y los músicos lo sean.

f) *Falsa precisión*. Consiste en exigir a todos los vocablos que usamos la precisión que corresponde sólo a cierta clase de palabras. Por ejemplo: "¿Quién es calvo? ¿Al que le faltan cien pelos, o doscientos, o mil? No puede determinarse; luego, no existen calvos".

Hemos enumerado algunas de las falacias retóricas más importantes. Como se puede apreciar fácilmente por nuestra exposición, ellas corresponden a muchas formas de argumentación que frecuentemente escuchamos en las discusiones, las polémicas doctrinarias, los discursos y la propaganda de todo tipo. De allí justamente la conveniencia de conocerlas, para evitar ser inducido a error por quien las emplee ante nosotros y también para evitar emplearlas nosotros e incurrir así en incorrección de pensamiento.

Ejercicios

- a) Ponga un ejemplo de cada una de las falacias estudiadas.
- b) Identifique las falacias de los siguientes ejemplos y determine en qué estriba en ellos el vicio del pensamiento:

"Debo hacer esto porque es justo; y es justo porque debo hacerlo"

"Hay que permitir la mentira, porque si no, tendríamos que decirle la verdad sobre su salud a gentes como los moribundos o los enfermos cardíacos"

"Las industrias que se mecanizan necesitan menos obreros; de allí que la expansión de la industria es causa de desocupación"

"La reforma que se propone es inconveniente y fracasará porque introduce sistemas que no son peruanos"

"Nadie ha podido probar que la Tierra no es eterna; tenemos razón pues para afirmar que ella ha existido siempre".

A—"Ningún patriota deja de defender a su patria con las armas"

B—"Pero, acaso los sacerdotes, las autoridades civiles, los obreros encargados de mantener la producción van a pelear al frente de batalla?"

A—"No, pero ellos rinden grandes servicios a la patria en sus respectivos puestos".
"Esa tesis es falsa. Basta para probarlo el comprobar que Fulano la está defendiendo".

"El niño está enfermo desde que la vecina lo miró; lo ha ojeado"

"Pedro fue un apóstol"

"Los apóstoles fueron doce hombres"

"Pedro es doce hombres".

"Los datos de la sensación necesitan verificarse por las proposiciones racionales"

Por su parte, las verdades racionales no pueden ser aceptadas si no se fundan en las sensaciones"

"Es falso hablar de la existencia de una época medieval, una época renacentista o una época moderna, pues nadie puede decir con precisión cuándo ellas comienzan ni cuándo terminan".

Examine los periódicos, revistas, libros, discursos, etc., que tenga a su alcance y busque en ellos casos de las falacias que hemos estudiado.

Capítulo XIII

LA INDUCCION

§ *Inferencia, deducción e inducción.* En todos los análisis que hemos efectuado hasta el presente sobre los procesos lógicos, hemos tomado los términos “inferencia” y “deducción” en sentido equivalente. En esto no hemos hecho sino coincidir con la tradición filosófica y con la mayoría de los autores. Las palabras “inferencia” y “deducción” se toman en la mayoría de los textos, como sinónimas. Pero, aunque la palabra “deducción” sólo tiene una significación, la palabra “inferencia” tiene dos significaciones que, aunque están estrechamente relacionadas, no coinciden enteramente. Una de ellas es exactamente lo mismo que deducción, es decir, el paso necesario de la verdad de unas proposiciones a la verdad de otras proposiciones.

doble sentido
de la palabra
inferencia

Pero puede haber inferencia cuando se supone que la relación entre la verdad del antecedente y la verdad del consecuente no es necesaria, sino probable. Cuando se interpreta la palabra “inferencia” en este sentido, se conserva el rasgo fundamental que nos sirvió para definir la deducción o inferencia en los primeros capítulos del libro: la relación de conexión entre la verdad de las proposiciones. Porque si se supone que la verdad del consecuente se puede derivar de la verdad del antecedente con probabilidad determinada, no cabe duda de

que existe una conexión entre la verdad de ambas proposiciones. Por eso el segundo sentido en que se toma a la palabra "inferencia", es diferente, pero está estrechamente vinculado con el primer sentido: en ambos casos la inferencia consiste en pasar de la verdad de una o varias proposiciones a la verdad de otra u otras proposiciones. Pero en el caso de la inferencia en sentido de deducción o en sentido estricto se pasa de manera necesaria, mientras que en el caso de la inferencia en un sentido más amplio se pasa de manera probable. En el primer caso se dice que se ha realizado una deducción y en el segundo caso se dice que se ha realizado una inducción. La inferencia viene a ser el género supremo, el rasgo general de todos los procesos en los que se pasa de la verdad de unas proposiciones a la verdad de otras proposiciones. La deducción y la inducción son sus dos únicas especies. En la deducción la inferencia se establece de manera absoluta, necesaria, mientras que en la inducción la inferencia se establece de manera probable, es decir, parcialmente confirmada.

§ 49. *Las leyes científicas y la inducción.* Las proposiciones empíricas y universales de las ciencias no matemáticas, es decir, de la física, la química, la astronomía, la biología, la sociología, la economía, etc., se denominan *leyes científicas*. Toda proposición científica que se refiere de manera directa a todos los objetos que estudia una ciencia, o a un gran conjunto de ellos, es una ley científica. Por ejemplo, la relación entre el calor y la dilatación de los cuerpos, la atracción gravitacional de las masas, la reflexión de los rayos luminosos, etc., son leyes científicas.

Las leyes científicas nunca tienen una verdad plenamente verificada o confirmada. Por ejemplo, en el caso de la dilatación de los cuerpos por el calor, la ve-

concepto de
ley científica

rificación sólo puede ser parcial, porque es imposible observar en el laboratorio todos los casos posibles. Una ley científica es una proposición hipotética, sostiene que si se cumple determinada condición, entonces se realizan tales y cuales fenómenos. Así, la ley de la dilatación de los cuerpos se enuncia:

“Si un cuerpo se calienta, entonces dicho cuerpo se dilata”.

Por tratarse de una proposición condicional, hipotética o implicativa, consta de dos proposiciones, un antecedente y un consecuente. Si llamamos “p” al antecedente y “q” al consecuente, la ley de la dilatación adquiere la forma de una implicación común:

$$p \rightarrow q$$

Pero si se analiza la manera como se ha fundamentado esta implicación, se llega a la conclusión de que estamos ante un caso de inferencia inductiva. En efecto, la proposición nos dice que si “p” es verdadera, entonces “q” es verdadera. Pero como se trata de una proposición que tiene pretensión de verdad científica, no puede ser una proposición con pretensión absoluta de verdad. Si los científicos aseguraran que la ley de la dilatación de los cuerpos es una proposición indubitante cometerían un error y la física sería falsa. Por eso los físicos cuando hablan de la ley de la dilatación lo hacen en sentido probable, teniendo plena conciencia que se trata de una proposición universal cuya verdad no está totalmente confirmada. Si dicha proposición no está plenamente confirmada, entonces es una proposición de verdad probable o parcialmente confirmada. Pero si la ley de la dilatación es una proposición de verdad pro-

bable, debe haber alguna manera de determinar cuál es el grado de su probabilidad. En general, si se dice que la proposición " $p \rightarrow q$ " es una ley científica y que su verdad es probable, debe saberse con toda precisión cuál es esta probabilidad, pues de otra manera toda la ciencia se tornaría en una especulación insegura y vaga.

La probabilidad de la verdad de una proposición implicativa de la forma " $p \rightarrow q$ " se denomina *grado de confirmación*. Lo fundamental para comprender lo que es el grado de confirmación es darse cuenta que depende de una *relación estructural entre el antecedente y el consecuente de la implicación*. O sea que el fundamento de la inducción es, en principio, *de la misma naturaleza que el fundamento de la deducción*. Tanto la deducción como la inducción se fundan en una relación de estructura o forma entre el antecedente y el consecuente de una implicación¹. Lo único que las diferencia es que la relación estructural en ambos casos es diferente. Cuando se trata de una deducción, se trata de una relación estructural que permite pasar de la verdad del antecedente a la verdad del consecuente de manera necesaria, absoluta; en cambio cuando se trata de una inducción, la relación estructural permite pasar de la verdad del antecedente a la del consecuente, sólo de manera probable.

inducción
funda en
a relación
estructural

1 Al hablar de antecedente y de consecuente de una implicación, se supone que ambos pueden constar de varias proposiciones de complicada estructura coligativa. Pero sean los antecedentes y consecuentes, simples o compuestos, se trata siempre de una implicación.

Capítulo XIV

LAS PARADOJAS LOGICAS

§ 50. *Las paradojas y el límite del conocimiento riguroso.* ¿Qué es una paradoja? Una paradoja es una contradicción de carácter especial. Se dice que en matemáticas existe una paradoja cuando se pueden demostrar dos teoremas contradictorios, es decir, dos teoremas, uno de los cuales es la negación simple y llana del otro. Pero, un teorema es una proposición que enuncia determinadas propiedades o relaciones matemáticas. Por lo tanto una paradoja consiste en la demostración de la verdad de dos proposiciones contradictorias. Pero esto es lógicamente imposible, pues dos proposiciones contradictorias no pueden ser nunca ambas verdaderas.

Cuando estudiamos los principios lógicos vimos que uno de los principios más importantes es el principio de contradicción, que consiste precisamente en afirmar que

paradoja o
contradic-
ción

dos proposiciones contradictorias no pueden ser las dos verdaderas. Este principio es:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

Y su esquema es:

p	$\sim (p \wedge \sim p)$	
V	V	F
F	V	F

Si se demuestra que dos proposiciones contradictorias son verdaderas, tendríamos que "p" es verdadera y " $\sim p$ " también es verdadera. Tendríamos entonces el derecho de poner " $p \wedge \sim p$ ", puesto que cuando dos proposiciones son verdaderas, la conjunción tiene que ser verdadera. Pero si aplicamos el método de los esquemas vemos que " $p \wedge \sim p$ " es una conjunción que es siempre falsa. En efecto:

p	$p \wedge \sim p$
V	F
F	F

Por eso, demostrar en matemáticas la verdad de dos teoremas contradictorios es dar al traste con la lógica y echar por tierra el rigor matemático. Las más modernas investigaciones lógicas, partiendo de un trabajo del gran matemático y lógico David Hilbert, muestran que si una teoría matemática cualquiera (aritmética, geometría, álgebra, cálculo, etc.) contiene una paradoja, es decir, dos proposiciones contradictorias, entonces puede demostrarse cualquier cosa dentro de ella y, naturalmen-

te, esto invalida a la teoría, pues si se demuestra cualquiera cosa dentro de ella, no puede distinguirse lo verdadero de lo falso.

Por eso también el primer descubrimiento de una paradoja matemática hecho por Burali-Forti y el de otras paradojas inmediatamente después, puso en marcha un enorme movimiento filosófico cuya meta fue mostrar que la existencia de paradojas se debía a pequeños errores de lógica y no a la estructura básica del conocimiento matemático. El genial filósofo Bertrand Russell fue el primero en descubrir cuál había sido el error lógico que había producido la existencia de las paradojas.

Desde que se descubrió la paradoja de Burali-Fort hasta nuestros días, hace ya más de medio siglo, los filósofos y los matemáticos se han esforzado en encontrar un método que permita librar para siempre al pensamiento matemático y al lógico del peligro de las paradojas. Pero aunque este esfuerzo ha hecho enormes progresos y ha servido para provocar el inmenso desarrollo de la lógica actual, no ha podido lograr su objetivo. En la actualidad se ha logrado eliminar todas las paradojas descubiertas, y hasta la fecha no se han encontrado nuevas paradojas. Pero no existe la seguridad absoluta de que no volverán a descubrirse nuevas paradojas. En la práctica se ha resuelto el problema, pues todo hace pensar que no volverán a encontrarse. Pero *no hay manera de demostrar que esto es cierto. Teóricamente existe la posibilidad de que aparezcan nuevas paradojas.*

Filosóficamente esto significa que el conocimiento riguroso tiene un límite. Si la filosofía hubiera probado de manera indiscutible que no volverán a encontrarse paradojas, se habría llegado a la conclusión de que la lógica y las matemáticas son ciencias completamente rigurosas. Pero como esta prueba no ha sido posible, se

ha debido aceptar que el rigor tiene un límite. Teóricamente la lógica y las matemáticas son disciplinas rigurosas, son disciplinas que adquieren constantemente nuevos conocimientos rigurosos y que aplican métodos de rigor indubitable. Pero encierran en su seno ciertos conocimientos cuya verdad no puede ser establecida con perfecto rigor. Y en estas regiones profundas, difíciles de alcanzar, la matemática se confunde con la filosofía, porque allí, cuando el rigor pierde piso, la ciencia debe inclinarse y la filosofía, corriendo todos los riesgos, haciendo frente a todas las aventuras, debe lanzarse a la conquista de las regiones ignotas.

§ 51. *Ejemplo de paradojas.* El estudio de las paradojas es uno de los capítulos más difíciles y avanzados de la lógica. Es totalmente imposible emprenderlo sin dominar técnicas altamente complicadas que pertenecen a una nueva disciplina que ha surgido precisamente como resultado de los esfuerzos conjuntos de los filósofos y matemáticos que han abordado el problema de las paradojas: la *metateoría*¹. Pero a pesar de esta dificultad pueden darse ejemplos fáciles que permitan captar, si no el sentido profundo de las paradojas, por lo menos el aspecto que pueden asumir.

Es curioso observar que las paradojas del tipo de las que se encontraron en matemáticas a fines del siglo pasado, han existido siempre en la filosofía y, aunque parezca mentira, en la literatura. Pero la estructura lógica de las paradojas es tan profunda, que los filósofos griegos y medievales que la estudiaron no pudieron comprenderla, porque carecían de los adecuados instru-

¹ En sus inicios, la metateoría se denominó *metamatemática*, porque se aplicaba únicamente al análisis de las teorías matemáticas. Pero en la actualidad se aplica al análisis de cualquier teoría y por eso se denomina *metateoría*. Algunos autores la denominan también *metaciencia*, *metalógica* o *metalingüística*.

mentos de análisis que actualmente brinda la metateoría. En general, aunque algunos autores les dieron gran importancia, como Aristóteles, se les consideró como meros juegos de palabras.

Empero, las paradojas siguieron asechando la mente del hombre y por eso, a través de los siglos encontramos numerosos y variados textos que las mencionan. Existen, como hemos dicho, hasta manifestaciones literarias de las paradojas. En algunos cuentos o novelas, como recurso para divertir al lector o como alarde de ingenio, se enuncian y analizan algunas paradojas de tipo muy similar al de las verdaderas paradojas de las matemáticas. El caso más notable es el de la inmortal novela de Cervantes, *El Quijote de la Mancha*. En el capítulo 51, de la segunda parte, que pertenece a la extraordinaria serie de la Insula Barataria, un forastero plantea una paradoja para poner a prueba el ingenio de Sancho, que había sido nombrado gobernador de la Insula con el objeto de divertir a los duques y su corte. La paradoja se conoce en la literatura lógica y matemática como la *paradoja del puente*.

En una comarca había un río que sólo podía cruzarse por un solo puente. A un lado del puente había una horca y un jurado compuesto de cuatro miembros. Por orden del señor de la comarca, a cada viajero que cruzaba el puente desde el otro lado, se le preguntaba a dónde iba, y para qué, y si decía la verdad se le dejaba pasar, pero si mentía se le ahorcaba. Un día llegó un extraño viajero y cuando le hicieron las preguntas, respondió: "Vengo para que me ahorquen".

El viajero dejó perplejos a los miembros del jurado, porque, por haber dicho la verdad, tenían que dejarlo pasar, pero si lo dejaban pasar, entonces ya no había ido para que lo ahorcasen, y, en consecuencia, había mentido. Y si había mentido, tenían que ahorcarlo.

Obsérvese cuidadosamente el mecanismo de la paradoja. Las condiciones impuestas son: el que dice la verdad puede pasar, el que miente, es ahorcado. El que dice *vengo a que me ahorquen*, dice la verdad (se supone, por supuesto, que quiere realmente que lo ahorquen), y en consecuencia debe pasar. Pero si pasa, no ha dicho la verdad, porque no lo han ahorcado. Y si no dice la verdad, deben ahorcarlo. O sea, si se decide ahorcarlo, hay que dejarlo libre, y si se decide dejarlo libre, hay que ahorcarlo. Se tome la decisión que se tome, se comete un error.

Por supuesto, la paradoja del puente tiene defectos, pues se trata de un ejemplo meramente literario. Pero existe un ejemplo muy sencillo de paradoja del mismo tipo, que es muy riguroso. Supongamos que formamos una proposición, que dice lo siguiente:

Esta proposición es falsa

Como se ve, es una proposición que se refiere a su propia falsedad. Planteémonos ahora el problema de saber si dicha proposición es verdadera o falsa. Supongamos primero que es verdadera. Entonces, si es verdadera, debe ser cierto lo que ella dice. Pero, ¿qué es lo que dice?: que es falsa. Entonces es cierto que es falsa. De su verdad se deduce su falsedad. Pero si se supone que es falsa, entonces, lo que ella dice es cierto, y si es cierto lo que dice, es verdadera. Y de su falsedad, se deduce su verdad.

A primera vista parece que se trata de un mero juego de palabras y como tal la tomaron muchos filósofos clásicos. Pero un análisis de su auténtico sentido, nos muestra que se trata de una verdadera paradoja. Se trata de una proposición que si se supone que es verdadera, resulta que es falsa y si se supone que es falsa, resulta que es verdadera. No hay escapatoria. Es una pro-

posición que es a la vez verdadera y falsa, lo que es imposible.

El descubrimiento de paradojas de esta naturaleza obligó a los filósofos y a los matemáticos a buscar la manera de evitarlas. Porque como hemos visto, una teoría matemática, y en general una teoría cualquiera en la que se presentan paradojas, pierde todo su valor. Desgraciadamente, las soluciones encontradas son demasiado complejas y técnicas para incluirlas en el presente texto. Bástenos decir que la solución más famosa de todas es la del insigne filósofo Bertrand Russell, cuyo nombre hemos mencionado ya varias veces. La solución propuesta por él se denomina *teoría de los tipos lógicos*. De manera muy general puede decirse que se trata de establecer ciertas reglas para la formación de las proposiciones de modo que no puedan formarse proposiciones que son paradojas. La gramática corriente, es decir, la gramática establecida por la Academia de la Lengua, que se estudia en el colegio, ofrece reglas para construir proposiciones. La parte de la gramática en que se estudian las reglas que se emplean para formar proposiciones correctas es la sintaxis. Por ejemplo, según la sintaxis, toda proposición debe tener por lo menos un verbo, y el artículo debe ir antes que el sustantivo. Así, yo puedo decir: *el auto corre rápido*, pero no puedo decir: *auto el rápido corre*. O sea, las reglas de la sintaxis no nos permiten formar frases como esta última. Empero, la gramática corriente, la gramática académica, no prevé ciertos casos, no dice si ciertas proposiciones pueden o no formarse. Por ejemplo, por más que se estudie la gramática académica, es imposible saber si una proposición como

Esta proposición es falsa

puede o no puede considerarse como proposición.

De acuerdo con la teoría de Russell y la de la gran mayoría de los matemáticos y filósofos modernos que se dedican al estudio de estos problemas, una proposición como la considerada no es una proposición, sino un *sin-sentido*. Porque es una *proposición que habla sobre sí misma* y para que una expresión cualquiera pueda ser considerada proposición, no debe de ninguna manera hablar sobre sí misma. La teoría de los tipos lógicos, puede por eso considerarse como una especie de complementación de las reglas de la sintaxis, como una teoría que muestra que es necesario tomar muchas precauciones cuando se forman proposiciones, porque si no se toman, entonces se pueden producir paradojas, es decir, proposiciones que son a la vez verdaderas y falsas y constituyen callejones sin salida para el pensamiento.

Solución de los ejercicios del capítulo I

- 1) a) Sí es proposición, b) si, c) no, d) no, e) no, f) no, g) no.
- 2) a) no, b) si, c) si, d) no, e) si, f) si, g) no, h) no, i) no.
- 3) a) La recta B es paralela a la recta A.
b) Algunos hombres no son inmortales.
b) Algunos filósofos son flemáticos.
c) A es más alto que C.
e) No puede hacerse ninguna deducción porque Juan puede o no ser amigo de Carlos.
f) Ninguna deducción, por la misma razón que e.
g) x es divisible por z.

Solución de los ejercicios del capítulo II

- 1) a) no, b) si, c) si, d) no, e) no, f) en parte, porque se ha reemplazado al sujeto por un símbolo especial, g) si.
- 2) a) $2 + 2 = 4$, b) $a \parallel B$, c) S es P, d) $A > B$, e) si $a = b$, y $b = c$, entonces $a = c$, f) si $x = y$, entonces $y = x$.

Solución de los ejercicios del capítulo III

- 1) a) individual, b) individual, c) relacional, d) estructural, e) estructural, f) si "pero" es sustantivo es predicativo; si es preposición es estructural, g) si "entonces" es adverbio es relacional, si es conjunción de subordinación, es estructural, h) predicativo, i) predicativo, j) relacional, r) predicativo.

- 2) a) inclusión, b) exclusión, c) interferencia, porque una persona que es sobrino de alguien, puede a su vez ser tío de otra persona, d) interferencia por la misma razón que el caso anterior, e) exclusión, f) interferencia, g) interferencia, h) interferencia, i) por el momento exclusión porque no hay ningún satélite que sea peruano; pero si algún día el Perú lanza satélites, entonces, la relación será de interferencia.

Solución de los ejercicios del capítulo IV

- 1) a) simple, b) simple, c) compuesta, d) compuesta, e) compuesta, f) compuesta, g) simple, porque no se trata de la unión de dos proposiciones sino de una proposición, una de cuyas partes es también una proposición.
- 2) a) predicativa, b) relacional, c) relacional, d) predicativa, e) relacional, porque al peinarse, la acción de Maria recae sobre ella misma. En el capítulo IX, que es sobre lógica relacional se aclara esta situación, g) relacional, porque hay una comparación con los demás animales. El sentido exacto de la proposición es, "si hay algún animal que no sea delfín, entonces, el delfín es más inteligente que dicho animal".
- 3) afirmativa, asertórica, universal; b) negativa, asertórica, universal; c) afirmativa, asertórica, individual; d) afirmativa, asertórica, universal; e) afirmativa asertórica, individual (en relación al sujeto); f) afirmativa, problemática, individual (en relación al sujeto); g) afirmativa, apodíctica, individual; h) negativa, apodíctica, universal; es apodíctica porque toda negación de una posibilidad expresa, una necesidad negativa, una inexistencia necesaria.

Solución de los ejercicios del capítulo V

- 1) a) proposicional; b) matemáticas o pronumerales c) proposicionales; d) proposicionales; e) proposicionales y matemáticas; f) S es una variable terminológica, pues simboliza cualquier término que pueda ser sujeto del predicado "brontosaurio"; g) terminológicas.
- 2) a) $p \wedge q$; b) $p \wedge q$; c) $p \vee q$; d) $p \rightarrow q$ (en realidad p, es a su vez una proposición compuesta, pero, en relación a lo que hemos estudiado, nos faltan elementos para formalizarla. Como la proposición total es implicativa, ponemos la variable "p" en el antecedente, pues "p" puede representar cualquier proposición, sea simple o compuesta; e) $p \rightarrow q$ (por las mismas razones que en el caso anterior; f) $p \rightarrow q$ por las mismas razones que en d) y e); g) $p \rightarrow q$.

Solución de los ejercicios del capítulo VI

- 1) a) $p \wedge q \rightarrow q$; b) $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$; c) $p \vee q$; d) $p \vee q \wedge r \vee s$; e) $p \wedge q \rightarrow r \wedge q$ (¡ojo! observe que "q" interviene dos veces); f) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow q$ (caso similar al anterior); g) $p \vee q \vee r \vee s \rightarrow t$
- 2) a) $p \wedge q \rightarrow r$; b) $p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$; c) $p \vee q \rightarrow r \vee \sim r$; d) $\sim r \rightarrow \sim p \vee \sim q$; e) $p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$
- 3) Por tratarse de un método puramente mecánico de fácil aplicación, es innecesario dar las respuestas. Para resolver los problemas basta pro-

ceder con cuidado, aplicar lo aprendido y verificar los resultados.

- 4) a) si son equivalentes; b) si; c) si; d) no; e) si; f) si; g) no.

Solución de los ejercicios del capítulo VII

- 1) a) no; b) si; c) si; d) si; e) si; f) si; g) no; h) si; i) no; j) no; k) si; l) no; m) no; n) no; o) si.

- 2) Estos ejercicios no presentan mayor problema, pero presuponen cierta práctica en el análisis del lenguaje y sobre todo en la formalización de las expresiones del lenguaje común por medio del simbolismo coligativo. Para facilitar al estudiante la solución, indicaremos en el primer ejercicio la manera como se han formalizado las proposiciones que integran la inferencia. Ello podrá servir de orientación para la solución de los ejercicios restantes.

- a) x es divisible por 4 = p ; x es par = q ;
 x es divisible por 2 = r .

Reemplazando las proposiciones por las variables y teniendo en cuenta que la palabra "luego" expresa siempre una deducción, tenemos:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r : \rightarrow p \rightarrow r$$

Como el antecedente " $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ " es verdadero y la expresión

" $p \rightarrow q, q \rightarrow r : \rightarrow p \rightarrow r$ " es un principio lógico, queda demostrado que " $p \rightarrow r$ ", o sea que si x es divisible por 4, entonces es divisible por 2.

- b) $p \wedge \sim p \rightarrow .q$
- c) $p \rightarrow \sim p \rightarrow .\sim p$
- d) $p \rightarrow q \rightarrow .\sim q \rightarrow \sim p$
- e) $p = \sim q \rightarrow .\sim q = p$
- f) $q \rightarrow r \wedge p \rightarrow q : \rightarrow p \rightarrow r$

Solución de los ejercicios del capítulo VIII

- 1) a) $a-b=0$; b) $ab=0$; c) $ab \neq 0$; d) $ab \neq 0$;
e) $ab=0$; f) $a-b \neq 0$; g) $a-b \neq 0$.

- 2) Cuando dos proposiciones son equivalentes, al ser formalizadas por medio del simbolismo de las clases, deben dar el mismo resultado. Puede suceder que el orden de los símbolos sea diferente, pero, si los símbolos son los mismos en ambas formalizaciones, las proposiciones son equivalentes, pues si tenemos una interferencia de clases ab , sabemos que $ab=ba$. Da lo mismo, en efecto decir: "algunos S son P" que "algunos P son S". Nota: cuando se encuentra una expresión como "no S" o "no P", se forma complemento de clase.
a) Si son equivalentes; b) si; c) si; d) no;
e) no; f) si; g) no.

- 3) a) ningún guatemalteco es peruano; b) algunos (seres) acuáticos son vertebrados; c) todos los vegetarianos son ahorradores; d) no tiene solución; e) no tiene solución f) algunos no futbolista no son deportistas; g) ningún no estudiantado es incorruptible.

Solución de los ejercicios del capítulo IX

- 1) a) Irreflexiva, simétrica, intransitiva, b) reflexiva (puesto que una persona puede verse a sí misma), no simétrica (uno puede ver sin ser visto, aunque no necesariamente), no transitiva (por la misma razón); c) reflexiva (una clase se incluye a sí misma, puesto que puede decirse: "todos los hombres son hombres", "todas las sillas son sillas", etc.), asimétrica, si $a < b$ entonces, $\sim(b < a)$, aunque esto no sucede en el caso que $a = b$, transitiva; d) irreflexiva, simétrica, transitiva; e) idem a la anterior; f) irreflexiva, simétrica, no transitiva; g) irreflexiva, asimétrica, intransitiva (no puede ser transitiva de ninguna manera); h) irreflexiva, asimétrica (no puede ser simétrica de ninguna manera), transitiva; i) irreflexiva, no simétrica, no transitiva; j) reflexiva, no simétrica, transitiva.
- 2) a) incorrecta; b) correcta; c) incorrecta; d) correcta; e) correcta; f) incorrecta (¡ojo! ¡aquí hay que analizar con precisión los conceptos!); g) correcta; h) correcta; i) correcta; j) correcta.
- 3) a) $R(x,y) \rightarrow (y,x)$
 b) $R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$
 c) $R(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow T(x,z)$
 d) $R(x,y) \rightarrow R(y,x)$
 e) $R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge S(z,u) \rightarrow S(x,u)$
 f) $R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow S(x,y)$
 g) $R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge T(z,u) \rightarrow Q(x,u)$
 h) $R(x,y,z) \wedge R(u,x,z) \wedge R(v,x,u) \rightarrow R(v,x,z)$
 i) $R(x,y,z,u) \rightarrow R(z,u,x,y)$
 j) $R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,u) \wedge R(y,u) \rightarrow R(x,u)$

- 4) a) Zebedeo, b) indeterminado pues Zebedeo puede tener varios hijos; c) el sobrino de Zebedeo; d) el tío de Zebedeo siempre que Zebedeo no tenga hermanas mujeres; e) Zebedeo (¡ojo! ¡esto hay que pensarlo muy bien!).
- 5) a) semejante; b) perpendicular; c) cruzado; d) causante; e) menos sabio; f) menos bueno o peor; g) al sudeste de; h) sobrino-nieto; i) tarabuelo; j) consuegro; k) antilogaritmo.

Solución de los ejercicios del capítulo XI

La índole de estos ejercicios hace impropio indicar soluciones, pues ellas deben ser dadas sólo para servir de control y no para hacer inútil la iniciativa del estudiante.

Solución de los ejercicios del capítulo XII

Se omiten las soluciones en este capítulo para dejar al lector la oportunidad de llegar a la solución sin ninguna guía. Como no hay problemas simbólicos exigidos por procesos de formalización, no hay verdadera dificultad.

BIBLIOGRAFIA

LIBROS DE INICIACION

a) en castellano

Francisco Romero y Eugenio Pucciarelli: **Lógica**. Espasa-Calpe, 1948 (1952, 14ª edición).

Francisco Miró Quesada. **Iniciación Lógica**. Universidad de San Marcos, Lima, 1958.

José Ferrater Mora y Hugues Leblanc: **Lógica Matemática**. Fondo de Cultura Económica, México, 1955.

G. Stahl: **Introducción a la Lógica Simbólica**. Ediciones de la Universidad de Chile, Santiago, 1946.

Francisco Miró Quesada: **Lógica** (Curso universitario). Biblioteca de la Sociedad Peruana de Filosofía, Lima, 1946.

Morris Cohen. **Introducción a la lógica**. Fondo de Cultura Económica. México.

Alfred Tarski: **Introduction to Logic**. Oxford University Press, 1941. Hay traducción castellana.

Willard van Orman Quine: **Methods of Logic**. Kegan Paul, 1952. Hay traducción castellana.

b) en lengua extranjera

Irvin Copi: **Introduction to Logic**. The Macmillan Co., 1953.

John C. Cooley: **A Primer of formal Logic**. The Macmillan Co., 1942.

BIBLIOGRAFIA

Gilles Gaston Granger. **Logica e Filosofia das Ciencias.** Edições, Melhoramentos, São Paulo, 1955.

Bela Julios: **Elemente der Neuen Logik.** Humboldt Verlag, Viena, 1954.

Introduction to Logic and sets. Ginn and Company, Boston 1958.

Patrick Suppes. **Introduction to Logic.** Van Nostrand, New York, 1958.

Robert Exner y Myron Roskopf. **Logic in Elementary Mathematics.** Mac Grow Hill, New York, 1959.

LIBROS DE FORMACION

Lewis and Langford: **Symbolic Logic.** The Century Cº, 1932.

Hans Reichenbach: **Elements of Symbolic Logic.** Mac Grow Hill, 1947.

Paul Rosenbloom: **The elements of Mathematical Logic.** Dover Publications, 1950.

Barkley Rosser: **Logic for mathematicians.** The Macmillan Co., 1953. (Fundamental para el estudiante de matemáticas).

Hilbert and Ackermann: **Foundations of Theoretical Logic.** Dover Publications, 1950.

A. N. Prior: **Formal Logic.** Oxford-At the Clarendon Press, 1955.

Alonzo Church: **Introduction to mathematical Logic** Princeton, 1956.

LOGICA

LIBROS DE INVESTIGACION

- Whitehead and Russell: **Principia Mathematica**. Kegan Paul. (Fundamental).
- Hilbert und Bernays: **Grundlagen der Mathematik**. Julius Springer, Berlín, 1934. (Imprescindible para comprender los más modernos desarrollos de la lógica y de la filosofía de las matemáticas).
- Rudolf Carnap: **Logical Syntax of Language**. Kegan Paul, 1937.
- F. B. Fitch: **Symbolic Logic**. The Ronald Press Company, 1953.
- E. W. Beth: **Les fondaments logiques des Mathématiques**. Gauthier — Villars, París, 1950.
- E. W. Beth: **La crise de la raison et la logique**. Gauthier — Villars, París, 1957.
- Haskell B. Curry: **Leçons de Logique Algébrique**. Gauthier — Villars, París, 1952.
- S. C. Kleene: **Introduction to metamathematics**. Van Nostrand, 1952. (Muy importante porque contiene todo lo nuevo hecho hasta la fecha de su publicación).
- E. W. Beth: **The foundations of Mathematics**. North-Holland, 1959.
- Jean Ladrière: **Les limitations internes des formalismes**. Gauthier — Villars, París, 1957.
- Alfred Tarski: **Logic Semantics, Metamathematics**. Oxford, 1956.